Esercizio 1, 09/07/21

Data la funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sinh z}$

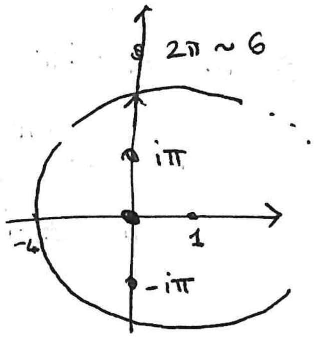
a) Determinare e classificare le singolarità nel disco $|z-1|<5$

b) Calcolare $\int_\gamma dz\, f(z)\, e^{iz}$ dove γ è il bordo antiorario del disco

(Trovare PP)

a) Nel disco le soluzioni di $z^2 \sinh z = 0$ son $z=0$ (polo di ordine 3)

e $z = \pm i\pi$ (poli di ordine 1). Infatti



$\sinh z \sim z$ in $z=0$

$\sinh(\pm i\pi + \varepsilon) \sim \varepsilon \cosh(\pm i\pi) + O(\varepsilon^2) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2)$

Difatti

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow \sinh z = 0 \Rightarrow e^z = e^{-z}$$

Se pongo

$w = e^z \Rightarrow w = \frac{1}{w} \iff w = \pm 1$ ossia $e^z = 1 \leadsto z = \pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$

Nel disco ~~di~~ assegnato ci sono solo $\pm i\pi$

Res in $z=0$ (Res = polo ordine 1)

b) Trovare sviluppo di Laurent in $z=0$

$$\frac{e^{iz}}{z^2 \sinh z} \sim \frac{1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \dots}{z^2\left(z + \frac{z^3}{6} + \dots\right)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + iz - \frac{1}{2}z^2 + \dots\right) \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{6} + \dots\right)} = \frac{1}{z^3}\left(1 + iz - \frac{1}{2}z^2 + \dots\right)\left(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)$$

Qui usiamo

$$\frac{1}{1+x} \overset{x=0}{\sim} 1 - x + \dots \qquad \text{(serie geometrica)}$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{i}{z^2} - \frac{2}{3z} + \dots \text{ regolare}$$

Per $z = \pm i\pi$ sviluppiamo in $z \mp i\pi = 0$ (chiamiamo ε)

$$\sinh(\pm i\pi + \varepsilon) \simeq -\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

Dunque

$$\frac{e^{iz}}{z^2 \sinh z} = \frac{e^{\pm\pi}}{(\pm i\pi)^2 \varepsilon \cos(\pm i\pi)} = -\frac{e^{\pm\pi}}{\pi^2 \varepsilon(-1)} \cdot \frac{e^{\pm\pi}}{\pi^2 \varepsilon}$$

$\Rightarrow$ in $z = i\pi$ in $z = -i\pi$

$$\sim \frac{e^{-\pi}}{\pi^2(z - i\pi)} + \text{reg} \qquad \sim \frac{e^{\pi}}{\pi^2(z + i\pi)} + \text{reg}$$

Serie di Laurent

- Compito 30/01/20 esercizio 2

Si indichino tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{e^{2z}+e^{z}-2}$$

Per le singolarità isolate nella striscia $|\mathrm{Im}\, z| < 2\pi$ si determini la parte principale dello sviluppo di Laurent e il raggio di convergenza.

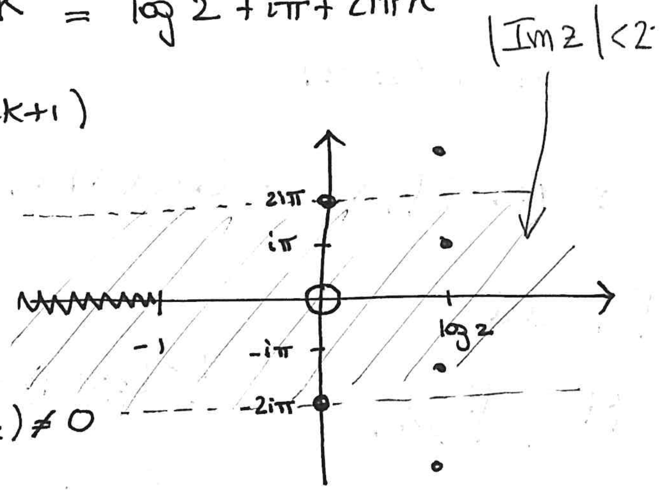
i) I poli sono dati dagli zeri del denominatore

$$e^{2z}+e^{z}+2=0 \rightsquigarrow w=e^{z} \Rightarrow w^2+w-2=0$$

$$\Rightarrow w_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow e^{z}=-2 \rightsquigarrow z_{1,k} = \log(-2)+2i\pi k = \log 2 + i\pi + 2i\pi k$$

$$= \log(2) + i\pi(2k+1)$$



$$e^{z} = 1 \rightsquigarrow z_{2,k} = 2\pi i k$$

Notiamo che

- $z_{1,k}$ sono poli semplici siccome $\log(1+z_{1,k}) \neq 0$

- $z_{2,k}$ per $k \neq 0$ sono ancora poli semplici

- $z_{2,0}$ non è un polo! infatti $\log(1+z) = z + o(z)$

$\rightsquigarrow f(z_{2,0}) = 0.$

Considero il ramo principale del log, per cui avrò branch-point in $z=-1$ e branch cut in $[-1, -\infty)$.

Per $|\mathrm{Im}\, z| < 2\pi$ abbiamo solo due poli $z_{1,0} \equiv \alpha$, $z_{1,-1} \equiv \beta$

Per trovare la parte principale dello sviluppo, calcolo i residui intorno ai due poli

$$\mathrm{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z-\alpha) f(z) = \cancel{\frac{\mathrm{Log}(1+\alpha)}{-3} \lim_{z \to \alpha} \frac{(z-\alpha)}{e^z+2}}$$

$$= \mathrm{Log}(1+\alpha) \lim_{z \to \alpha} \frac{(z-\alpha)}{e^{2z}+e^z-2}$$

Notiamo che

$$e^{2z}+e^z-2 = e^{2(z-\alpha)} \underbrace{e^{2\alpha}}_{4} + e^{z-\alpha} \underbrace{e^{\alpha}}_{-2} - 2$$

$$= 4e^{2(z-\alpha)} - 2e^{z-\alpha} - 2 = 4\left(1+2(z-\alpha)\right) - 2\left(1+(z-\alpha)\right) - 2 + o\left((z-\alpha)^2\right)$$

$$= 6(z-\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,\alpha) = \mathrm{Log}(1+\alpha) \lim_{z \to \alpha} \frac{(z-\alpha)}{6(z-\alpha)} = \frac{1}{6} \mathrm{Log}(1+\alpha)$$

Per cui

$$PP(f, \alpha) = \frac{\frac{1}{6}\mathrm{Log}(1+\alpha)}{z-\alpha}$$

Uguale per β.