TEORIA

Se $f(z)$ è analitica nell'anello $A(a,r,R)$ allora ha un'unica espansione di Laurent in quest'anello, con centro a

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{\text{parte analitica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \frac{1}{(z-a)^k}}_{\text{parte principale}}$$

$$c_k = \oint_\gamma \frac{dS}{2\pi i} \frac{f(S)}{(S-a)^{k+1}}$$

dove γ è un qualsiasi cammino chiuso positivo nell'anello che racchiude il centro una volta

↳ converge assolutamente su un disco centrato in a con raggio R

$\limsup \sqrt[n]{|c_n (z-a)^n|} < 1 \rightarrow |z-a| < R$ con $R = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$

converge assolutamente per $\limsup \sqrt[n]{|c_{-n}(z-a)^{-n}|} < 1 \longrightarrow |z-a| > r_n$ con $r = \limsup \sqrt[n]{|c_{-n}|}$

$$A(a,r,R) = \{ z : r < |z-a| < R \}$$

tutte le altre curvature non hanno taglio $\gamma = 1$

se una funzione $f(z)$ non è analitica in un punto a, ma è analitica in un disco $D'(a,r) = D(a,r) / \{a\}$, il punto a è una singolarità isolata della funzione

⟶ espansione di Laurent della funzione nel disco $D'(a,r)$

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

se $c_{-k} = 0 \ \forall k > 0$ singolarità removibile

se $\exists k > 0 \mid c_{-k} \neq 0 \wedge c_{-k-n} = 0 \ \forall n > 0$ polo di ordine k

se $\forall k > 0 \ c_{-k} \neq 0$ singolarità essenziale

il residuo di una funzione f nella singolarità isolata a è il coefficiente c_{-1} dell'espansione di Laurent nel disco $D'(r,a)$

$$\mathrm{Res}[f,a] = c_{-1} = \oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} f(z)$$

perché di tutta l'espansione $\oint_c \frac{dz}{z^n}$ contribuisce solo questo termine

dove γ è un qualsiasi cammino semplice che racchiude la singolarità a (antiorario) all'interno del disco di analiticità $D'(r,a)$

⟶ calcolo dei residui evitando la valutazione dell'integrale di contorno

→ polo di ordine k in a: $(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots$

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right]$$

→ teorema dei residui: Sia f una funzione analitica su D/S, dove $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ è l'insieme delle sue singolarità isolate nel dominio D. Se γ è un cammino chiuso in D/S tale che $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ per tutte $z \notin D$, allora

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}(\gamma, z_k)\, \mathrm{Res}[f, z_k]$$

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_i \underbrace{\mathrm{Res}[f(z_i), z_i]}_{\mathrm{Ind}(\gamma, z_i)} = 2\pi i \sum_i \oint_{-\gamma_i} dz\, f(z) = 2\pi i (-1) \sum_i \oint_{\gamma_i} dz\, f(z)$$

$$\oint_\gamma f(z)\, dz + 2\pi i \sum_i \oint_{\gamma_i} dz\, f(z) = 0$$

(nel caso di singolarità essenziale questa forma è più utile)

dove i γ_i lasciano il dominio sullo stesso lato del cammino γ

Lemma di Jordan)

Sia f una funzione complessa, continua sul semicerchio $\sigma = \{Re^{i\vartheta}, \vartheta \in [0, \pi]\}$ e sia $M(R) = \max_{\vartheta \in [0,\pi]} |f(Re^{i\vartheta})|$ allora

$$\left| \int_\sigma dz\, f(z)\, e^{iaz} \right| \leq \frac{\pi}{a} M(R) \quad a > 0$$

se il massimo $M(R)$ di $|f|$ su σ si annulla per $R \to \infty$ allora il contributo del semicerchio è nullo

per $a = 0$ considero il lemma di Stima

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leq M\, \ell(\Gamma) \quad \text{(disuguaglianza di Darboux)}$$

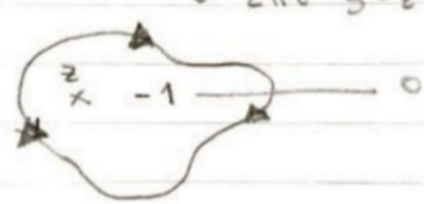
$\ell(\Gamma)$: lunghezza d'arco di Γ

$M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$

estremo superiore all'integrale su Γ

def) se γ è un cammino chiuso e $z \notin \gamma$ l'indice di γ rispetto a z è

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z}$$



formula integrale di Cauchy

Teorema (Dixon)

Sia γ una curva chiusa in un dominio D tale che $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0 \ \forall z \notin D$

Se f è olomorfa su D

(A) $\mathrm{Ind}(\gamma, z) f(z) = \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$

(B) $0 = \oint_\gamma d\zeta\, f(\zeta)$

teorema di Cauchy

formula integrale di Cauchy + teorema dei residui

non è altro che il teorema di Cauchy

A

$$I = \int_0^{2\pi} dx \, \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} dx \, \frac{e^{i2x}}{1+\operatorname{sen}^2 x} \underset{\substack{z = e^{ix} \\ dz = ie^{ix}dx}}{=} \operatorname{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{iz} \, \frac{z^2}{1+\frac{1}{(2i)^2}(z-\bar{z})^2} =$$

$$= \operatorname{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{i} \, \frac{4z}{4-(z-\bar{z})^2} \underset{\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}}{=} \operatorname{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{i} \, \frac{4z}{4-(z-1/z)^2} =$$

$$= \operatorname{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{i} \, \frac{4z^3}{4z^2-(z^2-1)^2} = \operatorname{Re} \oint_{C_1} dz \, \frac{4iz^3}{z^4-6z^2+1}$$

$$= \operatorname{Re} \oint_{C_1} dz \, f(z) \quad \text{dove} \quad f(z) = \frac{4iz^3}{z^4-6z^2+1}$$

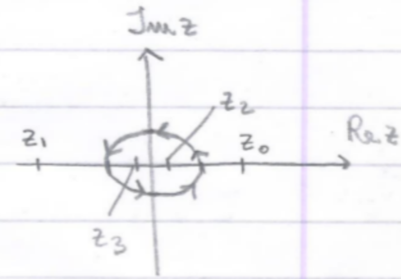
poli $\quad z^4 - 6z^2 + 1 = 0$

$y^2 - 6y + 1 = 0 \qquad y = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm 2\sqrt{2}$

$z^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} \qquad z = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \\ z_1 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}} \\ z_2 = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ z_3 = -\sqrt{3-2\sqrt{2}} \end{cases}$$

poli semplici



$$\oint_{C_1} dz \, f(z) = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z_2) + \operatorname{Res} f(z_3) \right)$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \lim_{z \to z_2} \frac{4iz^3(z-z_2)}{z^4-6z^2+1} \overset{H}{=} \lim_{z \to z_2} \frac{4i(4z^3 - 3z^2 z_2)}{4z^3-12z} =$$

$$= \frac{4i z_2^3}{4z_2^3 - 12 z_2} = \frac{4i z_2^2}{4(z_2^2-3)} = \frac{i z_2^2}{z_2^2-3}$$

$$\operatorname{Res} f(z_3) = \frac{i z_3^2}{z_3^2-3}$$

$$\oint_{C_1} dz \, f(z) = 2\pi i \, (i) \left[\frac{z_3^2(z_2^2-3) + z_2^2(z_3^2-3)}{(z_2^2-3)(z_3^2-3)} \right] =$$

$$= -2\pi \, 2 \left[\frac{(3-2\sqrt{2})\cancel{(3-2\sqrt{2}-3)}}{(3-2\sqrt{2}-3)^{\cancel{2}}} \right] = \cancel{-}\, 4\pi \, \frac{3-2\sqrt{2}}{\cancel{-}\,2\sqrt{2}} =$$

$$= 4\pi \, \frac{(3-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{4} = \pi(3\sqrt{2}-4)$$

$$I = \pi(3\sqrt{2}-4)$$

(B)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} \frac{\cos k\vartheta}{\cosh\xi - \cos\vartheta} = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} \frac{e^{ik\vartheta}}{\cosh\xi - \cos\vartheta} =$$

$$\underset{\substack{z = e^{i\vartheta} \\ dz = ie^{i\vartheta} d\vartheta}}{=} \mathrm{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i z} \frac{z^k}{\cosh\xi - \frac{1}{2}(z+\bar z)} \underset{\bar z = \frac{|z|^2}{z}}{=} \mathrm{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{2z^{k-1}}{2\cosh\xi - (z + 1/z)} =$$

$$= \mathrm{Re} \oint_{C_1} \frac{dz}{\pi i} \frac{z^k}{2z\cosh\xi - (z^2+1)} = \mathrm{Re} \oint_{C_1} dz\, f(z)$$

dove $f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{i z^k}{z^2 - 2z\cosh\xi + 1}$ $\quad \left(\begin{array}{l} \xi > 0 \\ k = 0, 1, \dots \end{array}\right)$

$\xi \in \mathbb{R}$

poli $\quad z^2 - 2z\cosh\xi + 1 = 0$

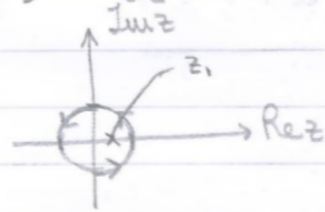
$$z = \cosh\xi \pm \sqrt{\cosh^2\xi - 1} =$$

$$= \cosh\xi \pm \mathrm{senh}\,\xi = \frac{1}{2}\left[e^{\xi} + e^{-\xi} \pm (e^{\xi} - e^{-\xi})\right]$$

poli semplici

$z_0 = e^{\xi}$

$z_1 = e^{-\xi}$



$$I = \mathrm{Re}\, 2\pi i \left[\mathrm{Res}\, f(z_1)\right]$$

$$\mathrm{Res}\, f(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{i}{\pi} \frac{(z - z_1) z^k}{z^2 - 2z\cosh\xi + 1} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{z \to z_1} \frac{i}{\pi} \frac{(k+1) z^k - k z_1 z^{k-1}}{2z - 2\cosh\xi} =$$

$$= \frac{i}{\pi} \frac{z_1^k}{2(z_1 - \cosh\xi)} = \frac{i}{\pi} \frac{e^{-k\xi}}{2\left[e^{-\xi} - \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi})\right]}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-k\xi}}{\frac{1}{2}(e^{-\xi} - e^{\xi})} = \frac{-i}{2\pi} \frac{e^{-\xi k}}{\mathrm{senh}\,\xi}$$

$$I = \frac{e^{-\xi k}}{\mathrm{senh}\,\xi}$$

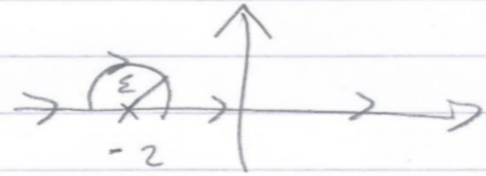
~~come varia $f(z)$ ($\rho < 1$) attraversando il taglio~~

~~$f(\vartheta = \pi + i\varepsilon) = f(\vartheta = \pi)$~~

(5)

$$I = \fint_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(2+x)(x^2+4)} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \left(\int_{-R}^{-2-\varepsilon} + \int_{-2+\varepsilon}^{R} \right) \frac{dx}{(2+x)(x^2+4)}$$

isolo la singolarità $x = -2$
e non la considero nell'integrale
(inoltre integro su un intervallo simmetrico)

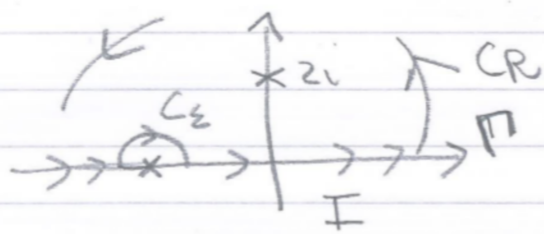


$$I = \fint_{\mathbb{R}} \frac{dz}{(2+z)(z^2+4)}$$

$f(z) = \dfrac{1}{(2+z)(z^2+4)}$

ha poli semplici
$z = -2$
$z = \pm 2i$

considero il cammino Γ



$$\oint_\Gamma dz\, f(z) = I \underbrace{- \pi i \operatorname{Res} f(-2)}_{+\text{ contributo } C_\varepsilon} + \int_{CR} f(z)\, dz =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res} f(2i)$$

$$\Downarrow$$

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{Res} f(2i) + \frac{1}{2} \operatorname{Res} f(-2) \right]$$

$$\operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{z - 2i}{(2+z)(z-2i)(z+2i)} =$$

$$= \frac{1}{8i} \frac{1}{1+i}$$

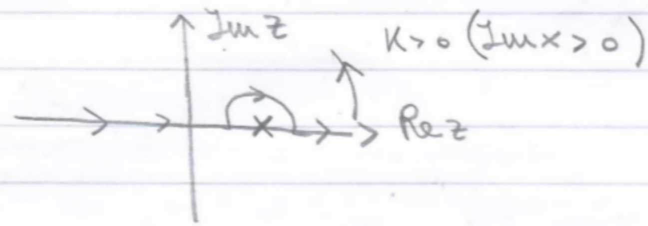
$$\operatorname{Res} f(-2) = \lim_{z \to -2} \frac{z+2}{(2+z)(z^2+4)} = \frac{1}{8}$$

$$I = 2\pi i \, \frac{1}{8}\left(\frac{1}{i(1+i)} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi i}{4}\left(\frac{-i(1-i)}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

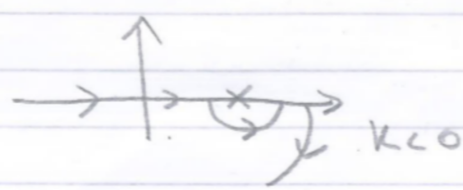
$$= \frac{\pi i}{4}\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx \, \frac{e^{ikx}}{x-y}$$

$y \in \mathbb{R}$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I - \pi i \,\mathrm{Res}\, f(y) = 0 \qquad k>0$$

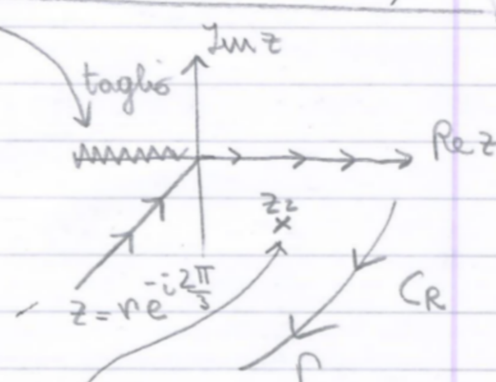


$$I + \pi i \,\mathrm{Res}\, f(y) = 0$$

$$\mathrm{Res}\, f(y) = \lim_{z\to y} \frac{z-y}{z-y}\, e^{ikz} = e^{iky}$$

$$I = \pi i \,\mathrm{sgn}(k)\, e^{iky}$$

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} = \int_0^\infty dz \, \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$$



$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I + \int_\infty^0 e^{-i\frac{2\pi}{3}} dr \, \frac{\sqrt{r}\, e^{-i\pi/3}}{r^3+1} + \int_{C_R} f(z)\,dz =$$

$$= I\left(1 - e^{-i\pi}\right) = 2I$$

$$z^3 = -1 = e^{i\pi + 2n\pi i}$$

$$z = e^{i\pi/3 + i2\pi/3\, n}$$

$$n = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{i\pi/3}$$

$$z_1 = e^{i\pi}$$

$$z_2 = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}$$

... il taglio

$$I = -\pi i \,\mathrm{Res}\, f(z_2)$$

nel primo foglio di Riemann

è equivalente ad imporre per $z = r e^{i\vartheta}$ $\vartheta \in [-\pi, \pi]$

$$\text{Res} f(z_2) = \lim_{z \to z_2} \frac{(z-z_2)\sqrt{z}}{z^3+1} \overset{H}{=} \lim_{z \to z_2} \frac{\frac{3}{2} z^{1/2} - \frac{1}{2} z_2 z^{-1/2}}{3z^2} = \quad \text{(E)}$$

$$= \frac{z_2^{1/2}}{3z_2^2} = \frac{1}{3} z_2^{-3/2} = \frac{1}{3}\left(e^{-i\pi/3}\right)^{-3/2} =$$

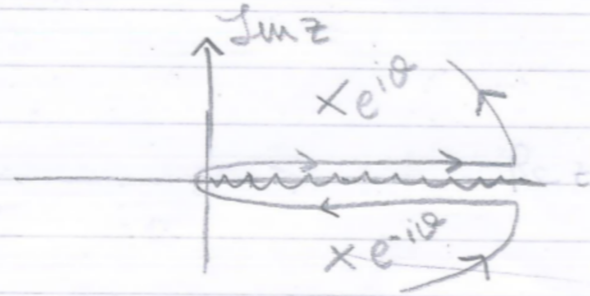
$$= \frac{1}{3} e^{i\pi/2} = \frac{1}{3} i$$

$$= + \frac{1}{3} i$$

$$I = + \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{x^\mu}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \int_0^\infty dz \, \frac{z^\mu}{z^2 - 2z\cos\theta + 1} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \; |\mu| < 1$$

ho un taglio



$$f(z) = \frac{z^\mu}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$$

$$z = re^{i\vartheta} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$f(0) = \frac{r^\mu}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} \qquad f(2\pi) = \frac{r^\mu e^{2\pi i\mu}}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I - Ie^{2\pi i\mu} + \int_{C_R} f(z)\,dz =$$

$$= I\left(1 - e^{2\pi i\mu}\right)$$

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0 \qquad z = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} =$$

$$= \cos\theta \pm i \,\text{sen}\,\theta = e^{\pm i\theta}$$

$$I\left(1 - e^{2\pi i\mu}\right) = 2\pi i \left(\text{Res} f(e^{i\theta}) + \text{Res} f(e^{-i\theta})\right)$$

$$\text{Res} f(e^{i\theta}) = \lim_{z \to e^{i\theta}} \frac{(z - e^{i\theta}) z^\mu}{z^2 - 2z\cos\theta + 1} \overset{H}{=} \lim_{z \to e^{i\theta}} \frac{(\mu+1) z^\mu - \mu z^{\mu-1} e^{i\theta}}{2z - 2\cos\theta} =$$

poli semplici

$$= \frac{e^{i\theta\mu}(\mu+1) - e^{i\theta\mu}\mu}{\ldots}$$

attenzione Ricorda l'intervallo di definizione di ϑ $\quad e^{-i\vartheta} = e^{i2\pi - i\vartheta}$

$$\operatorname{Res} f(e^{i\vartheta}) = \frac{e^{i\vartheta\mu}}{2e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} = \frac{e^{i\vartheta\mu}}{2i \operatorname{sen}\vartheta}$$

$$\operatorname{Res} f(e^{-i\vartheta}) = \left(\begin{matrix}\operatorname{Res} f(e^{i\vartheta}) \\ \vartheta \longrightarrow \underset{= 2\pi - \vartheta}{-\vartheta}\end{matrix}\right) = \frac{e^{-i\vartheta\mu}}{-2i \operatorname{sen}\vartheta} = \frac{e^{+i\mu(2\pi-\vartheta)}}{-2i \operatorname{sen}\vartheta}$$

$$I = \frac{1}{1 - e^{2\pi i\mu}} \frac{2\pi \cancel{i}}{\cancel{2i} \operatorname{sen}\vartheta} \left(e^{i\mu\vartheta} - e^{i\mu(2\pi-\vartheta)}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\vartheta} \frac{\left(e^{i\mu\vartheta} - e^{i\mu(2\pi-\vartheta)}\right)}{e^{\pi i\mu}\left(e^{-\pi i\mu} - e^{\pi i\mu}\right)} =$$

$$= \frac{\pi \, e^{-\pi i\mu}}{\operatorname{sen}\vartheta\,(-2i)\operatorname{sen}(\pi\mu)} \left(e^{i\mu\vartheta} - e^{i\mu(2\pi-\vartheta)}\right) =$$

$$e^{-i\pi\mu}\left(e^{i\mu\vartheta} - e^{i\mu(2\pi-\vartheta)}\right) =$$

$$= e^{i\mu(\vartheta-\pi)} - e^{i\mu(\pi-\vartheta)} =$$

$$= e^{i\mu(\vartheta-\pi)} - e^{-i\mu(\vartheta-\pi)}$$

$$I = \frac{\pi \operatorname{sen}(\mu(\pi-\vartheta))}{\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\pi\mu}$$

$a \in (-1,1)$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\vartheta}{1 - 2a\cos\vartheta + a^2} d\vartheta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\left(e^{i2\vartheta} + e^{-i2\vartheta}\right) d\vartheta}{2\left(1 - 2a\cos\vartheta + a^2\right)} =$$

$$\underset{\substack{z = e^{i\vartheta} \\ dz = i e^{i\vartheta} d\vartheta}}{=} \oint_{C_1} \frac{1}{iz} \frac{z^2 + z^{-2}}{\left(1 - a(z + \bar{z}) + a^2\right)} dz =$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{i\cancel{z}} \frac{(z^4 + 1)\cancel{z}}{z^2\left(z - a(z^2+1) + za^2\right)} dz$$

poli $\quad z = 0$

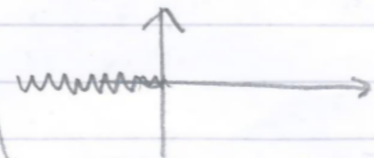
$\qquad z = a \quad -a(z^2+1) + z(1+a^2) = 0$

G

$\log(z) = \operatorname{Log}|z| + i \arg z + i2\pi n$ ← diversi fogli di Riemann

$n = 0 \quad \log(z) \equiv \operatorname{Log}(z)$ logaritmo principale

$\vartheta \in [-\pi, \pi]$



$$\text{II} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\log x}{x^{a}+1}\right) e^{ikx} \qquad a \in \mathbb{N}$$

estendo al piano complesso e considero il taglio lungo l'asse immaginario

→ $\operatorname{Im} k > 0$ semiasse immaginario negativo

→ $\operatorname{Im} k < 0$ semiasse immaginario positivo

$\operatorname{Log}(x+i\varepsilon) = \log|x| + i\pi$

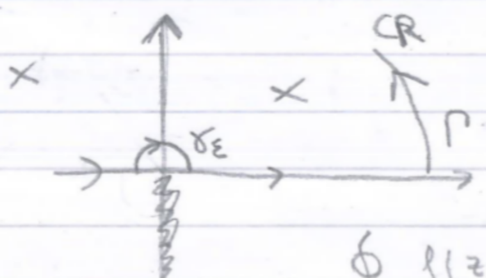
$\operatorname{Log}(x-i\varepsilon) = \log|x| - i\pi$

discontinuità di $2\pi i$

↑ che posso rimuovere cambiando foglio di Riemann

considero il logaritmo principale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{\log z}{z^{a}+1} e^{ikz} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{\log|z| \, e^{ikz}}{z^{a}+1} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg z \, e^{ikz}}{z^{a}+1} = I_R + I_I$$



$\operatorname{Im} k > 0 \implies \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I_R + I_I \underbrace{- \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz}_{=0}$$

per $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$

$$I_R + I_I = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res} f(z_i)$$

$z = 0$ non è un polo

$$z^{a} + 1 = 0$$

consideriamo $a = 4$ $\quad z^4 = -1 = e^{i\pi + 2in\pi}$

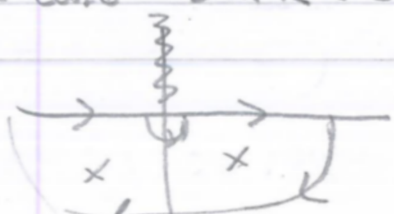
$z = e^{i\pi/4 + i\pi/2\, n}$

$n = 0, 1, 2, 3$

attenzione intervallo di definizione di ϑ

$\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1)$

nel caso $\operatorname{Im} k < 0$



$\vartheta \in \left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right]$

$z_0 = e^{i\pi/4} \quad z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$z_2 = e^{i5/4\pi} \quad z_3 = e^{i7/4\pi} = e^{-i\pi/4}$

(H)

possiamo raccordare discontinuità attraverso fogli di Riemann

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{y-x} = \int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}\,\sqrt{1+z}} \frac{1}{y-z} =$$ $|y|>1$

$$= \int_{-1}^{1} dz\, f(z) \qquad \text{dove} \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}\,\sqrt{1+z}\,(y-z)}$$

sia $h(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}}$ $\qquad g(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ $\qquad \xi(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$

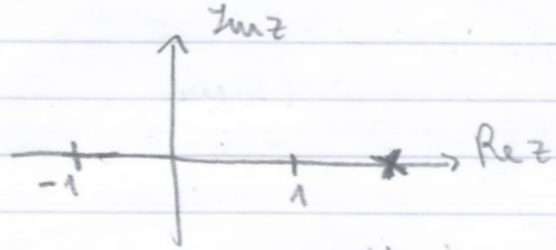
$$h(z) = |1+z|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\arg(1+z)}\, e^{-i\pi n}$$

$$\hookrightarrow e^{-\frac{1}{2}\log(1+z)}$$

$$g(z) = |1-z|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\arg(1-z)}\, e^{-i\pi m}$$

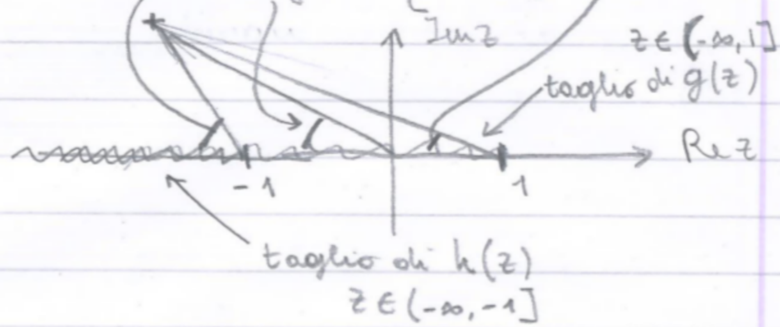
$$\xi(z) = |z|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\arg(z)}\, e^{-i\pi k}$$

$\left(\begin{array}{l} n = 0 \\ k = 0 \\ m = 0 \end{array} \right)$



sgn $y > 0$

consideriamo $\arg z \in [-\pi, \pi]$



la discontinuità è nei moduli

consideriamo $z = \rho e^{i\vartheta}$ per $\rho > 1$

valutiamo f per $\vartheta = \pi - \varepsilon$ e per $\vartheta = -\pi + \varepsilon$

$\left(\begin{array}{c} \rho > 1 \\ \Delta f = 0 \end{array} \right)$

$$f(\pi-\varepsilon) = g(\pi-\varepsilon)\, h(\pi-\varepsilon)\, \frac{1}{(y-z)} =$$

$$= g(\pi)\, h(\pi)\, \frac{1}{y - z_\pi} = \frac{|1-z|^{-1/2}\, |1+z|^{-1/2}\, e^{-i\pi}}{y - z_\pi}$$

$$f(-\pi+\varepsilon) = e^{2i\pi} f(\pi-\varepsilon)$$

$$f(-\pi+\varepsilon) = g(-\pi+\varepsilon)\, h(-\pi+\varepsilon)\, \frac{1}{y - z_\pi} =$$

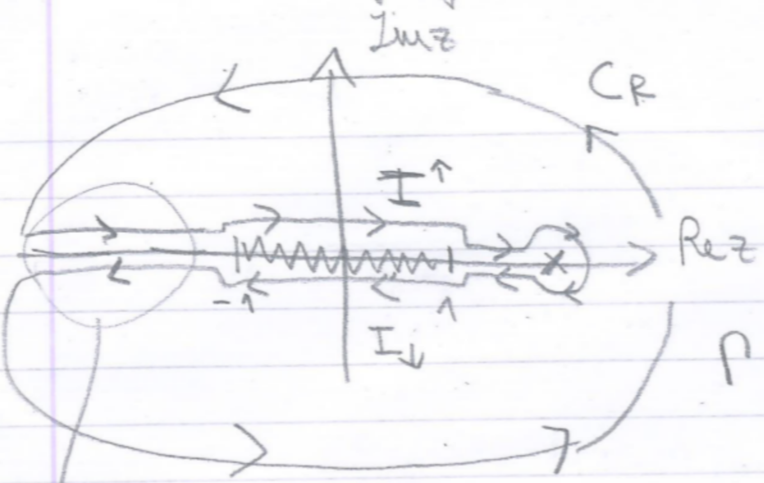
$$= g(-\pi)\, h(-\pi)\, \frac{1}{y - z_\pi} = \frac{|1-z|^{-1/2}\, |1+z|^{-1/2}\, e^{i\pi}}{y - z_\pi}$$

per $\rho < 1$

$$f(-\pi+\varepsilon) = e^{-i\pi} f(\pi-\varepsilon) \quad \begin{cases} f(\pi-\varepsilon) = \frac{|1-z|^{-1/2}\, |1+z|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\pi}}{y - z_\pi} & \left(= \frac{g(\pi-\varepsilon)\, h(0)}{y - z_\pi}\right) \\ f(-\pi+\varepsilon) = |1-z|^{-1/2}\, |1+z|^{-1/2}\, e^{i\pi/2} & \left(= g(-\pi+\varepsilon)\, h(0)\right) \end{cases}$$

I

sgn $y > 0$



questi due contributi si annullano $\Delta f = 0$

$$I_\downarrow = -\int_{-1}^{1} dz\, f(z)\, e^{-i\pi} = -e^{-i\pi} I_\uparrow = I_\uparrow$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + I^\uparrow + I_\downarrow - 2\pi i \,\mathrm{Res}\, f(y) = 0$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in C_R} |f(z)|\, \ell(C_R) = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2}\,R} \to 0$$

disuguaglianza di Darboux

$= 0$ lemma di stima

$$2 I_\uparrow = 2\pi i \,\mathrm{Res}\, f(y)$$

$$e^{-\frac{i}{2}\arg(1-y^2)} = -\frac{i}{2}$$

$$\mathrm{Res}\, f(y) = \lim_{z\to y} \frac{(z-y)}{\sqrt{1-z^2}\,(y-z)} = -|1-y^2|^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}\arg(1-y^2)}$$

$$I_\uparrow = I = +\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$$

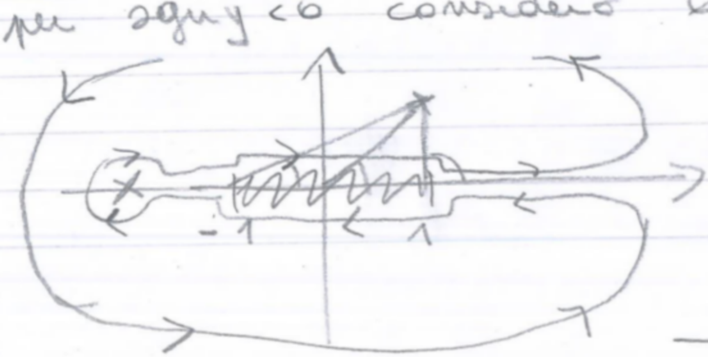
per sgn $y < 0$ considero $\vartheta \in (0, 2\pi]$

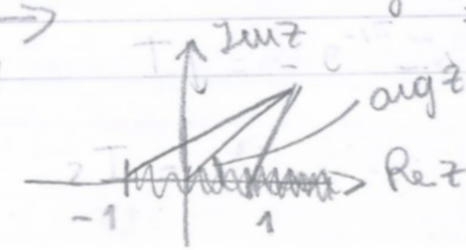
ovvero taglio di $g(z$

$z \in (1, \infty)$

taglio di h

$z \in [-1,$





$\rho < 1$ come cambia $f(z)$ attraversando il taglio

$$f(0+\varepsilon) = \frac{g(\pi-\tilde{\varepsilon})\, h(0+\varepsilon)}{y-z_0} = \frac{e^{-\frac{i}{2}\pi}\, |1-z|^{-1/2}|1+z|^{-1/2}}{y-z_0}$$

$$f(2\pi-\varepsilon) = \frac{g(\pi+\tilde{\varepsilon})\, h(2\pi-\varepsilon)}{y-z_{2\pi}} = e^{-i\pi/2}\, \frac{e^{-i\pi}\, |1-z|^{-1/2}|1+z|^{-1}}{y-z_0}$$

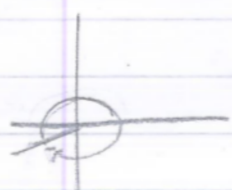
$$f(2\pi-\varepsilon) = e^{-i\pi} f(0+\varepsilon)$$

$$I_{\downarrow} = -e^{-i\pi} I_{\uparrow}$$

$$2I_{\uparrow} = 2\pi i \operatorname{Res} f(y) = -\frac{2\pi}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$e^{-\frac{i}{2}\arg(1-y^2)} = e^{-\frac{i}{2}\pi} = -i$$

avendo $\vartheta \in (0, 2\pi)$ in questo caso non esco dall'intervallo di definizione



$\arg(-1) - \frac{i}{2}\arg(y^2-1) =$

$-\frac{i}{2}\left[\arg(-1) + \arg(y^2-1)\right] =$

$-\frac{i}{2}(\pi - 2\pi)$ per non uscire dall'intervallo di definizione

$\vartheta \in (-\pi, \pi]$

per

) per

o)