9 Trasformate di Fourier 1

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Applichiamo semplicemente la definizione di trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} e^{-ikx} \Big|_{-L}^{L} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} \left(e^{-ikL} - e^{ikL} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k} \left(\frac{e^{ikL} - e^{-ikL}}{i} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kL)}{k}
\end{aligned}$$

è interessante notare il seguente fatto

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kL)}{k} = \delta(k)$$

e quindi che

$$\begin{aligned}
&\lim_{L \to \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kL)}{k} = \lim_{L \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \frac{\sin(kL)}{k} \\
&= \lim_{L \to \infty} \int_{-L}^{L} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}\{1\} = \sqrt{2\pi} \delta(k)
\end{aligned}$$

Dunque la trasformata di Fourier di 1 è la delta di Dirac in 0

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{x}{L}\right| & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Dalla definizione di trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= K \int_{-L}^{L} e^{-ikx} \left(1 - \left|\frac{x}{L}\right|\right) \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{K \int_{-L}^{L} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x}_{\text{Esercizio preced.}} - K \int_{-L}^{L} e^{-ikx} \left|\frac{x}{L}\right| \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kL)}{k} - K \left(- \int_{-L}^{0} e^{-ikx} \frac{x}{L}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{L} e^{-ikx} \frac{x}{L}\, \mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

valutiamo a parte l'integrale indefinito $\int e^{-ikx} x\, \mathrm{d}x$. Utilizziamo sempre il trucchetto alla Feynman

$$\begin{aligned}
\int e^{-ikx} x\, \mathrm{d}x = i \int \frac{d}{dk} e^{-ikx}\, \mathrm{d}x &= i \frac{d}{dk} \int e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{d}{dk} \frac{i}{ik} e^{-ikx} = -\frac{d}{dk} \frac{e^{-ikx}}{k} \\
&= -\frac{-ikxe^{-ikx} - e^{-ikx}}{k^2} = \frac{1 + ikx}{k^2} e^{-ikx}
\end{aligned}$$

dunque, tornando alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kL)}{k} - K \left(- \int_{-L}^{0} e^{-ikx} \frac{x}{L}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{L} e^{-ikx} \frac{x}{L}\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kL)}{k} - \frac{K}{L} \left(\frac{1 + ikx}{k^2} e^{-ikx} \Big|_0^L - \frac{1 + ikx}{k^2} e^{-ikx} \Big|_{-L}^0 \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kL)}{k} - \frac{K}{L} \left(\frac{1 + ikL}{k^2} e^{-ikL} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{1 - ikL}{k^2} e^{ikL} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kL)}{k} - \frac{K}{L}\left(-\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^2}\left(e^{-ikL} + e^{ikL}\right) + \frac{ikL}{k^2}\left(e^{-ikL} - e^{ikL}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kL)}{k} - \frac{K}{L}\left(-\frac{2}{k^2} + \frac{2\cos(kL)}{k^2} + \frac{2kL\sin(kL)}{k^2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kL)}{k} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2 L} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(kL)}{k^2 L} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kL)}{k} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos(kL)}{k^2 L}
\end{aligned}
$$

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$
f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}
$$

Questo è praticamente identico al precedente, cambia soltanto l'integrale

$$
\frac{K}{L^2}\int_{-L}^{L} e^{-ikx} x^2 \,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(k^2L^2 - 2)\sin(kL) + 2kL\cos(kL)}{k^3}
$$

senza fare troppi passaggi, inseriamolo nella trasformata

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{-L}^{L} e^{-ikx}\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(kL)}{k} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(k^2L^2 - 2)\sin(kL) + 2kL\cos(kL)}{k^3}
\end{aligned}
$$

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$
f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}
$$

Per questa trasformata abbiamo bisogno di un pochino di analisi complessa. Difatti dobbiamo calcolare il seguente integrale indefinito

$$
\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x
$$

per la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{a^2 + z^2}$$

vale il teorema di Jordan. Dividiamo quindi l'integrale in due casistiche e quindi due curve di integrazione

- $k > 0$ condiseriamo come curva il semicerchio di raggio R che si trova nel semipiano inferiore $\mathrm{Im}(z) < 0$, chiuso da un segmento sull'asse reale da $-R$ ad R
- $k < 0$ condiseriamo come curva il semicerchio di raggio R che si trova nel semipiano superiore $\mathrm{Im}(z) > 0$, chiuso da un segmento sull'asse reale da $-R$ ad R

Essendo f analitica su e dentro le curve di integrazione, ad eccezione di un polo, useremo il teorema dei residui.
Andiamo a calcolare l'integrale nel primo caso

$$\oint_\gamma \frac{e^{-ikz}}{a^2 + z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\lambda_x} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\gamma_R(\theta) = Re^{-i\theta} \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\lambda_x(x) = x \quad x \in [-R, R]$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi\frac{R}{R^2 - a^2} \xrightarrow[\text{Jordan}]{R\to\infty} 0$$

$$\int_{\lambda_x} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z)$$

$$-2\pi \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z) = -2\pi i \frac{e^{-ikz}}{z - ia}\bigg|_{z=-ia} = \pi\frac{e^{-ka}}{a}$$

il meno per il calcolo dei residui è dovuto al fatto che si sta percorrendo il contorno in verso orario

Nel secondo caso, l'integrale sulla semicirconferenza va sempre a zero all'aumentare del raggio e l'integrale sulla retta tende al nostro integrale. Ci basta quindi valutare il residuo in $z = ia$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z=ia} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-ikz}}{z + ia}\bigg|_{z=ia} = \pi\frac{e^{ka}}{a}$$

Dunque, l'integrale, varrà

$$\hat{f}(k) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-|k|a}}{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} e^{-a|k|}$$

10 Trasformate di Fourier 2

> Calolare la trasformata du Fourier della funzeion
>
> $$f(x) = e^{-a|x|}$$

Siccome $f(x) = e^{-a|x|}$ è una funzione di Schwartz $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, e la trasformata di Fourier è un isomorfismo tra spazi di Schwartz, la sua trasformata coincide con l'antitrasformata dell'esercizio precedente

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

> Calcolare la trasformata di Fourier della funzione
>
> $$f(x) = e^{-ax^2}$$

Per calcolare questa trasformata di Fourier facciamo un integrale nei complessi

$$\oint_\gamma e^{-ikz} e^{-az^2} \, \mathrm{d}z$$

dove γ è una curva nel piano $\mathrm{Im}(z) > 0$ composta da quatto segmenti:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(x) = x + ki && x \in [-b, b] \\
&\lambda_2(x) = -x && x \in [-b, b] \\
&\lambda_3(t) = b + (k - t)i && t \in [0, k] \\
&\lambda_4(t) = b + ti && t \in [k, 0]
\end{aligned}$$

ossia un rettangolo di lati $2b$ e k, con un lato sull'asse reale.

Notiamo come in e su γ, la funzione non abbia alcun polo, dunque per il teorema dei residui l'integrale

$$\oint_\gamma e^{-az^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

sfruttiamo questo per risolvere il nostro integrale sul contorno indicato

$$\begin{aligned}
&I = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&e^{-az^2} = e^{-a(x+ik)^2} = e^{-a(x^2-k^2-2ixk)} \\
&\oint_\gamma e^{-az^2}\,\mathrm{d}z = e^{ak^2}\oint_\gamma e^{-ax^2+2aikx}\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

Ponendo ora $k = \frac{p}{2a}$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\oint_\gamma e^{-az^2}\,\mathrm{d}z \quad &= \\
&= \lim_{b\to\infty} e^{\frac{p^2}{4a}}\int_{-b}^{b} e^{-ax^2+ipx}\,\mathrm{d}x - \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x \\
&+ \lim_{b\to\infty}\int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(-b+it)^2} i\,\mathrm{d}t - \lim_{b\to\infty}\int_0^{\frac{p}{2a}} e^{-a(b+it)^2} i\,\mathrm{d}t \\
&= e^{\frac{p^2}{4a}} I - \sqrt{\frac{\pi}{a}} = 0 \\
\implies I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}
\end{aligned}$$

dunque, incorporando il fattore di normalizzazione $1/\sqrt{2\pi}$ otteniamola trasformata che stavamo cercando

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Notare come la trasformata di Fourier di una gaussiana sia ancora una gaussiana.

> Calcolare la trasformata di Fourier della funzione
>
> $$f(x) = x^n e^{-a|x|}$$

Per svolgere questo esercizio utilizziamo uno dei teoremi di convoluzione, in particolare

$$\mathcal{F}\{f\cdot g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\{f\}\star\mathcal{F}\{g\}$$

dove $f \star g$ indica la convoluzione delle due funzioni. Nel nostro caso

$$\mathcal{F}\{x^n e^{-a|x|}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{y^n} \star \widehat{e^{-a|x-y|}}$$

Dalle proprietà della trasformata di Fourier possiamo calcolare che

$$\mathcal{F}\{y^n\} = \sqrt{2\pi} i^n \delta^{(n)}(k)$$

dove $\delta^{(n)}(k)$ è la derivata n-esima della delta di Dirac. Dunque nel nostro caso otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} i^n \delta^{(n)}(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + (k-y)^2} \, \mathrm{d}y$$

Qui abbiamo la derivata in senso delle distribuzioni di una delta di Dirac, dalla derivazione in senso delle distribuzioni sappiamo che

$$\langle \varphi | \delta^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle \varphi^{(n)} | \delta \rangle$$

che nel nostro caso ci porta ad

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-i)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dk^n} \frac{a}{a^2 + (k-y)^2} \delta(k) \, \mathrm{d}y = (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{dk^n} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

Dunque la trasformata di Fourier che stavamo cercando è

$$\hat{f}(k) = (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}k^n} \frac{a}{a^2 + k^2}$$

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} e^{-b(x-y)^2} \, \mathrm{d}y$$

Per questa trasformata, notiamo che la funzione è definita tramite la convoluzione di due gaussiane

$$f(x) = e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$$

e che dunque per calcolarne la sua trasformata di Fourier ci basterà usare il teorema di convoluzione e la trasformata di una gaussiana (che sappiamo).

$$\mathcal{F}\{f \star g\} = \sqrt{2\pi} F\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-\frac{k^2}{4b}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2ab}}e^{-\frac{k^2}{4a}-\frac{k^2}{4b}} = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}}e^{-\frac{k(a+b)}{4ab}}$$

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|y|}e^{-b|x-y|}\,\mathrm{d}y$$

Anche qui vale lo stesso argomento di prima, non svolgo i calcoli.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+y^2}\frac{1}{b^2+(x-y)^2}\,\mathrm{d}y$$

Anche qui l'argomento è lo stesso, mi risparmio nuovamente i calcoli.

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|y|}e^{-b(x-y)^2}\,\mathrm{d}y$$

Questo è più simpatico ma identico ai due prima: conoscendo le trasformate delle due funzioni, basta farne il prodotto per trovare la trasformata della convoluzione

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{ae^{-\frac{k^2}{4b}}}{a^2+k^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\frac{ae^{-\frac{k^2}{4b}}}{a^2+k^2}$$

11 Trasformate di Fourier 3

Data una funzione $f(x)$ della forma $f(x) = g\left(\frac{x}{L}\right)$ tale che la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ decade a zero più velocemente di $|k|^{-2}$. Si definisca Δx ("larghezza" della funzione $f(x)$) come

$$\Delta x = \frac{\int |x| f(x)\, \mathrm{d}x}{\int f(x) \mathrm{d}x}$$

e Δk come

$$\Delta k = \frac{\int |k| \hat{f}(k)\, \mathrm{d}k}{\int \hat{f}(k) \mathrm{d}x}$$

Mostrare che si ha sempre

$$\Delta x \Delta k = \mathrm{cost}$$

Questo è il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Utilizzando le proprietà per la dilatazione della trasformata di Fourier

$$\widehat{f\left(\frac{x}{\lambda}\right)} = \lambda \hat{f}(\lambda k)$$

la dimostrazione è piuttosto banale.

Giusto per divertimento, l'esercizio si può complicare un pochino nel seguente modo

Sia $f \in \mathcal{L}^2_1(\mathbb{R})$, tale che $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = 1$. Dimostrare che

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2\, \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |k|^2 |\hat{f}(k)|^2\, \mathrm{d}k\right) \geq \frac{1}{(4\pi)^2}$$

Suggerimento: supporre che $f \in C^\infty_c$ ed usare l'identità

$$\int_{\mathbb{R}} x \overline{f}(x) f'(x) = -\frac{1}{2} \|f\|^s_2$$

l'identità di Plancherel e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Indichiamo con $\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d)$ lo spazio L^2 pesato

$$\mathcal{L}^2_s(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ misurabili} : (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} f \in L^2\}$$

La dimostrazione di questa richiede un po' più di analisi reale, ma non è niente di troppo complicato. Ricordiamo che l'identità di Plancherel (P) dice che

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

che vale anche per le derivate di f. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (CS) invece asserisce che

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Possiamo risolvere l'esercizio dunque

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} x\overline{f}(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{CS}}{\leq} \|x \mapsto x\overline{f}(x)\|_2 \cdot \|f'\|_2 \underset{\text{P}}{=} \|x \mapsto x\overline{f}(x)\|_2 \cdot \|\widehat{f'}\|_2$$

Sapendo che

$$\|\widehat{f'}\|_2^2 = 2\pi\|x \mapsto x\hat{f}(x)\|_2^2$$

otteniamo

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \leq \|x \mapsto x\overline{f}(x)\|_2^2 \cdot \|x \mapsto x\hat{f}(x)\|_2^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2|\hat{f}(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)$$