SITO vittorioerba.github.io/teaching_precorso2021.html

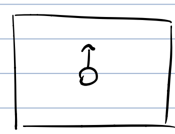
↳ • libro open source fisica
  • raccolta esercizi su vettori

LEZIONE 5 : VETTORI

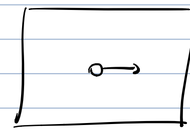
motivazione: – grandezze fisiche con direzione

es: • temperatura T

SCALARE



$T = 20°C$

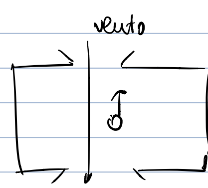


$T = 20°C$

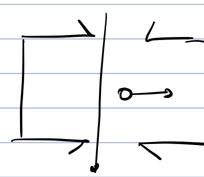
↳ T non dipende dalla direzione in cui guardate

•

VETTORIALE



vento vi viene contro



vento vi spinge di lato

↳ velocità V del vento dipende dalla direzione in cui guardate

VETTORE ha 4 caratteristiche

– MODULO "lunghezza del vettore"
"intensità della grandezza fisica"

es: vento 10 km/h

– DIREZIONE "retta con la quale è allineata la grandezza fisica"

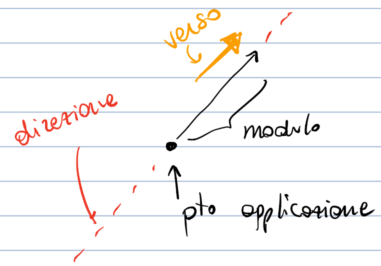
es: vento "tramontana" N-S

– VERSO "quale dei 2 versi possibili, data la direzione, ha la mia grandezza fisica"

es: vento "tramontana" da Nord a Sud

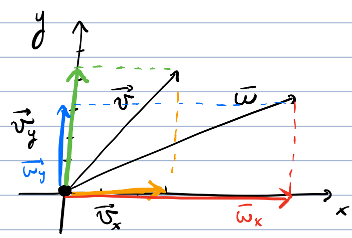
- PUNTO DI APPLICAZIONE "dove misuro la grandezza fisica"

Rappresentazione grafica di un vettore <u>FRECCIA</u>



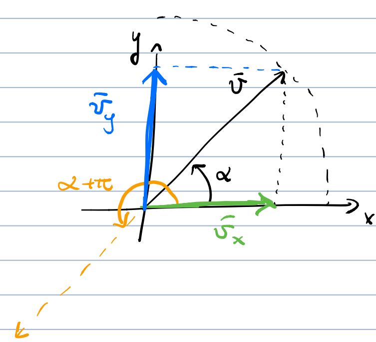
CASO 2D

- scomposizione in componenti cartesiane



SISTEMA DI RIFERIMENTO

- componenti cartesiane sono la proiezione ortogonale del vettore lungo gli assi
- le componenti sono "indipendenti"



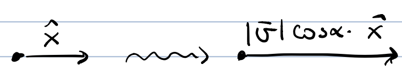
$\vec{v}$: vettore

α : angolo che determina la direzione E il verso

lunghezza del vettore $\vec{v}$

$|\vec{v}_x| = v_x = |\vec{v}| \cos\alpha$

$\hat{x}$: vettore orizzontale con verso nella direzione delle x positive di lunghezza 1 (VERSORE x)



$\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos\alpha \cdot \hat{x}$

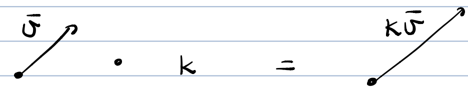
riscalo il vettore $\hat{x}$ del fattore $|\vec{v}|\cos\alpha$

moltiplico la sua lunghezza

$|\bar{v}_y| = v_y = |\bar{v}| \sin\alpha$, $\hat{y}$ (VERSORE Y, VERT.)

$\bar{v}_y = |\bar{v}| \sin\alpha \cdot \hat{y}$

• RISCALAMENTO DI UN VETTORE



k: numero oppure grandezza scalare

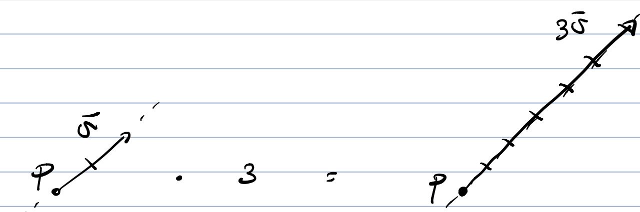
modulo del vettore — valore assoluto di un numero

$|k\bar{v}| = |k|\,|\bar{v}|$

direzione $k\bar{v}$ = direzione di $\bar{v}$

verso: è = $\bar{v}$ se $k > 0$

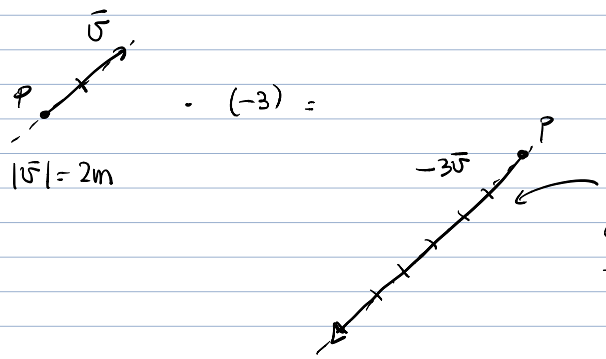
è opposto a $\bar{v}$ se $k < 0$



verso concorde a $\bar{v}$ perché $3 > 0$

$|\bar{v}| = 2m$ $|3\bar{v}| = 6m$

punto di applicazione P non cambia

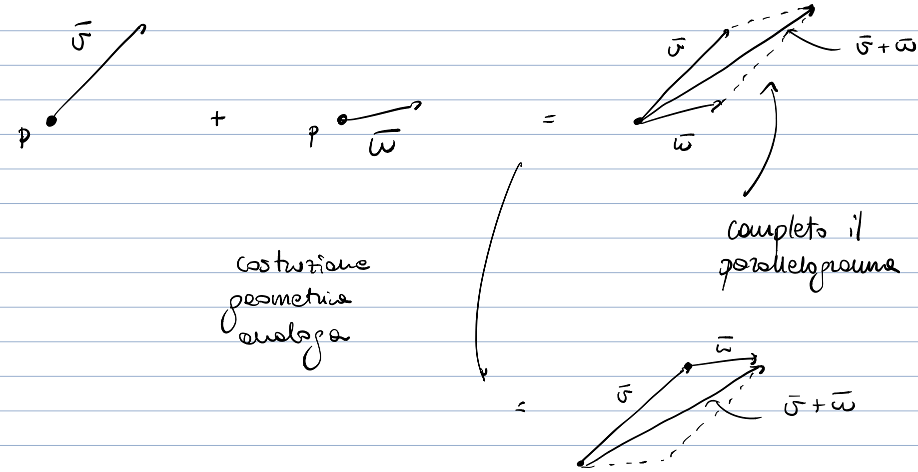


$|\bar{v}| = 2m$

verso opposto a $\bar{v}$ perché $-3 < 0$

$|-3\bar{v}| = 6m$

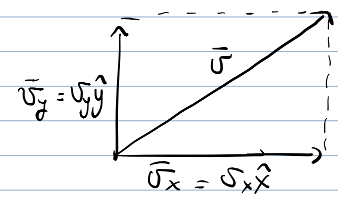
- SOMMA (COMPOSIZIONE) DI VETTORI



vale che $\quad (\bar{v}+\bar{w})_x = v_x + w_x$

$$(\bar{v}+\bar{w})_y = v_y + w_y$$

OSSERVAZIONE : $\quad \bar{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$



es: $\quad \vec{v} \longrightarrow$ modulo 3, direzione $\frac{\pi}{6}$ $\qquad \bar{w} \longrightarrow$ modulo 2, direzione $\frac{\pi}{3}$

1) componenti cartesiane di $\bar{v}$ e $\bar{w}$

$$|\bar{v}_x| = v_x = |\bar{v}|\cos\alpha_v = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$|\bar{v}_y| = v_y = |\bar{v}|\sin\alpha_v = 3\sin\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|\bar{w}_x| = w_x = |\bar{w}|\cos\alpha_w = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$|\bar{w}_y| = w_y = |\bar{w}|\sin\alpha_w = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y} \quad e \quad \bar{w} = \hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}$$

2) $7\bar{v} - 4\bar{w} = ?$

$$(7\bar{v} - 4\bar{w})_x = (7\bar{v})_x + (-4\bar{w})_x =$$

$$= 7v_x - 4w_x = 7 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot 1 =$$

$$= \frac{21\sqrt{3} - 8}{2}$$

$$(7\bar{v} - 4\bar{w})_y = 7v_y - 4w_y = 7\,\frac{3}{2} - 4\sqrt{3} = \frac{21 - 8\sqrt{3}}{2}$$

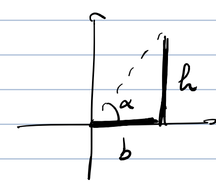
$$7\bar{v} - 4\bar{w} = \frac{21\sqrt{3} - 8}{2}\,\hat{x} + \frac{21 - 8\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}$$

$$7\bar{v} - 4\bar{w} = 7\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y}\right) - 4\left(\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}\right) =$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{21}{2}\hat{y} - 4\hat{x} - 4\sqrt{3}\hat{y} =$$

$$= \frac{21\sqrt{3} - 8}{2}\,\hat{x} + \frac{21 - 8\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}$$

3) calcolare $\alpha_{7\bar{v} - 4\bar{w}} = ?$

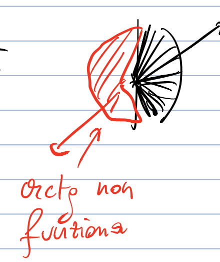


$$\arctan\left(\frac{21 - 8\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{21\sqrt{3} - 8}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{21 - 8\sqrt{3}}{21\sqrt{3} - 8}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{b}$$

arctg funziona solo per $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$



se $v_x > 0$ $\quad \alpha_v = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

se $v_x < 0$ $\quad \alpha_v = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + \pi$

se $v_x = 0$ e $v_y > 0$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

se $v_x = 0$ e $v_y < 0$ $\quad \alpha = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

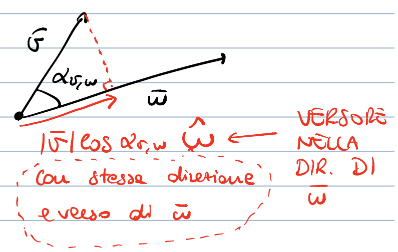
$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{(modulo)}$$

I VETTORI SI COMPORTANO MALE CON I PRODOTTI

PRODOTTO SCALARE $\quad$ 2 vettori $\longrightarrow$ 1 scalare

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = |\bar{v}||\bar{w}| \cos \alpha_{v,w}$$

é commutativo



$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_x w_x + v_y w_y$$

motivazione : – applicazioni fisiche "quanto un vettore é allineato ad un altro"

$\alpha_{v,w} = 0 \qquad \bar{v} \cdot \bar{w} = |v||w| \qquad \rightrightarrows$

$\alpha_{v,w} = \frac{\pi}{2} \qquad \bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \qquad \perp$

$\alpha_{v,w} = \pi \qquad \bar{v} \cdot \bar{w} = -|v||w| \qquad \leftrightarrows$

lavoro di una forza $\quad L = \bar{F} \cdot \bar{\Delta s}$

es : $\quad \bar{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{3}{2} \hat{y} \quad$ e $\quad \bar{w} = \hat{x} + \sqrt{3} \hat{y}$

1) calcolare $\bar{v} \cdot \bar{w}$

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_x w_x + v_y w_y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y}\right)\cdot\left(\hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x}\cdot\hat{x} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x}\cdot\sqrt{3}\,\hat{y} + \frac{3}{2}\hat{y}\cdot\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y}\cdot\sqrt{3}\,\hat{y} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}(\hat{x}\cdot\hat{x}) + \frac{9}{2}(\hat{x}\cdot\hat{y}) + \frac{3}{2}(\hat{y}\cdot\hat{x}) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(\hat{y}\cdot\hat{y})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\,1\cdot 1\cdot\cos 0 + \frac{9}{2}\,1\cdot 1\cdot\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{3}{2}\,1\cdot 1\cdot\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,1\cdot 1\cdot\cos 0 =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = 3\sqrt{3}$$

2) moduli di $\bar{v}$ e $\bar{w}$

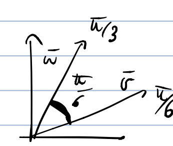
$$\left[\bar{v} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{3}{2}\hat{y} \quad \text{e} \quad \bar{w} = \hat{x} + \sqrt{3}\,\hat{y}\right]$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

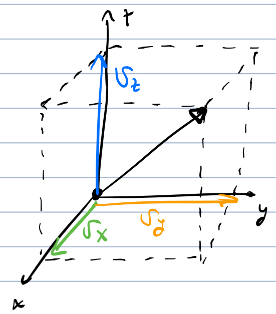
3) $\alpha_{v,w}$ $\qquad \cos(\alpha_{v,w}) = \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\cdot|\bar{w}|} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

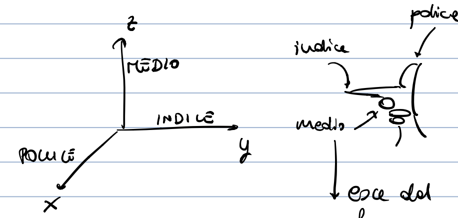
$$\alpha_{v,w} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$



PASSIAMO IN 3D $\longrightarrow$ lavoriamo in componenti

$$\bar{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$





MANO DESTRA

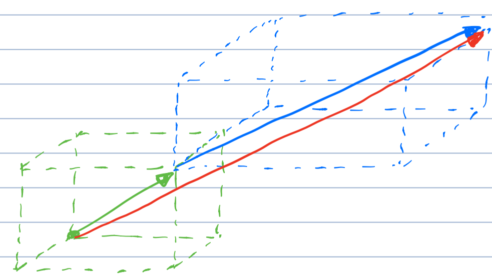
RISCALAMENTO $\quad k\bar{v} = (k v_x)\hat{x} + (k v_y)\hat{y} + (k v_z)\hat{z}$

SOMMA $\quad \bar{v} + \bar{w} = (v_x + w_x)\hat{x} + (v_y + w_y)\hat{y} + (v_z + w_z)\hat{z}$

PRODOTTO SCALARE $\quad \bar{v} \cdot \bar{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$

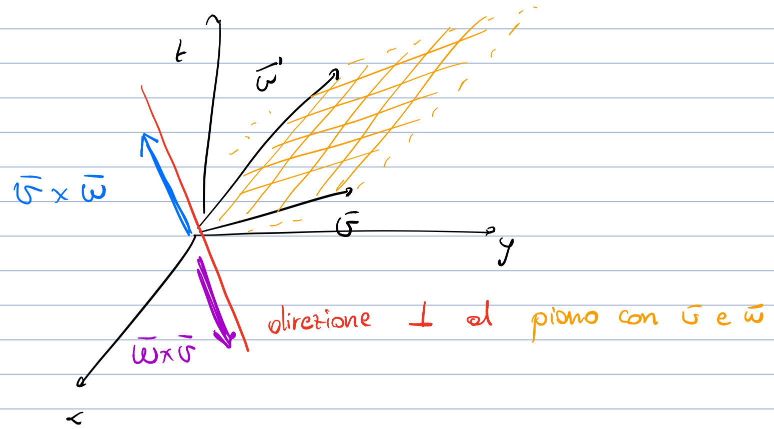
metodi geometrici

OK in 2d
DELIRIO in 3d
PRENDETE IL NOBEL SE LO FATE in 4d



PRODOTTO VETTORIALE (3d)

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{cases} \cdot\ |v| \cdot |w| \cdot \sin(\alpha_{v,w}) & \text{modulo} \\ \cdot\ \perp \text{ al piano che contiene } \bar{v} \text{ e } \bar{w} & \text{direzione} \\ \cdot\ \text{verso è dato dalla regola mano dx con pollice allineato a } \bar{v} \text{ e indice allineato a } \bar{w} & \text{verso} \end{cases}$$



- per def. $\bar{v} \perp \bar{v} \times \bar{w}$

  $\bar{w} \perp \bar{v} \times \bar{w}$

- per def $\bar{v}, \bar{w}, \bar{v} \times \bar{w}$ è destrorsa

  (rispetta regola mano dx)

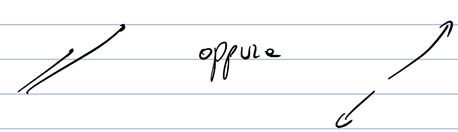
- $(\bar{v} \times \bar{w}) = -(\bar{w} \times \bar{v})$ (scambiare $\bar{v}$ e $\bar{w}$ scambia indice e pollice nella regola della mano destra, e ribalta il medio)

  verso opposto

  prodotto anticommutativo

- $|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}| \sin \alpha_{v,w} = 0$

  $\alpha_{v,w} = 0, \pi$



$$|\bar{v} \times \bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}| \sin \alpha_{v,w} = |\bar{v}||\bar{w}|$$

$$\alpha_{v,w} = \pi/2 \qquad \bar{v} \perp \bar{w}$$

- $$\begin{aligned} \bar{v} \times \bar{w} = \; & (v_y w_z - v_z w_y)\, \hat{x} \; + \\ & (v_z w_x - v_x w_z)\, \hat{y} \; + \\ & (v_x w_y - v_y w_x)\, \hat{z} \end{aligned} \qquad \xrightarrow{x,\, y,\, z}$$

$$\bar{v} = \hat{x} \quad , \bar{w} = \hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\, \hat{z} = \hat{z}$$