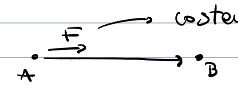
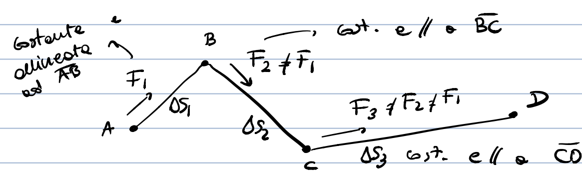
# LEZIONE 4 : INTEGRALI

- integrali definiti } teorema "legame"
- integrali indefiniti
- integrali delle funzioni elementari
- regole base di integrazione (NON per parti, per sostituzione) ← DA RIPASSARE DURANTE I° SEMESTRE
  - ↳ funzioni fratte

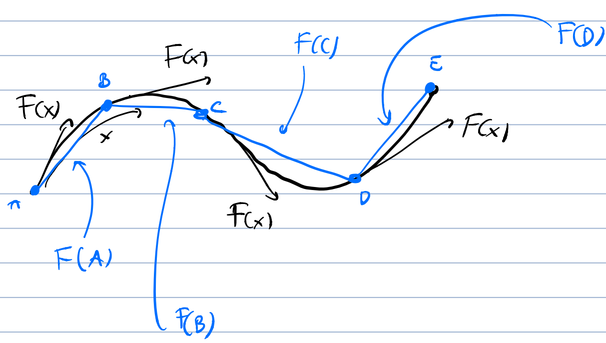
## • INTEGRALI DEFINITI

$L = F \Delta s$



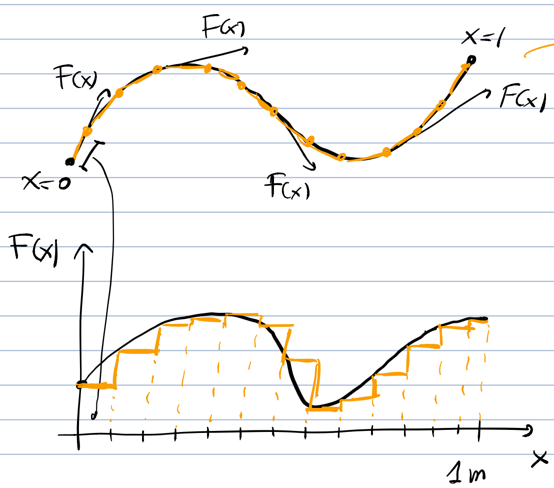




$L = F_1 \Delta s_1 + F_2 \cdot \Delta s_2 + F_3 \Delta s_3$




$L \sim \sum_{\text{segmenti}} F(i) \Delta s$

- $F(i)$: inizio del segmento
- $\Delta s$: lunghezza segmento




$L \sim \sum_{\text{seg.}} F(i) \Delta s$

APPROX MIGLIORE

$L \sim \sum_{\text{seg.}} h_{\text{seg.}} \cdot b_{\text{seg.}}$

x → posizione lungo la traiettoria

↳ APPROX LAVORO con AREA SOTTESA AL GRAFICO F(x)

↓

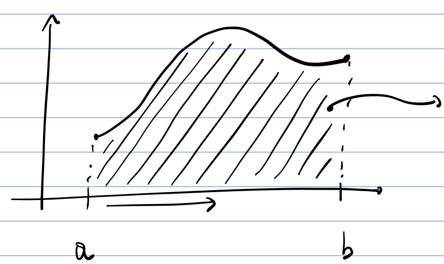
$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{seg.} f(x_{seg.}) \Delta x_{seg} = \text{area sottesa al grafico di } f =$$

↑ esattamente, non più approssimato

$$= \int_{x=0}^{x=1} dx\, f(x)$$

es: MOTO RETT. UNIF. ACC. $\Delta v = a \Delta t$

a non costante $\Delta v = \int_{t_{in.}}^{t_{fin}} a(t)\, dt$



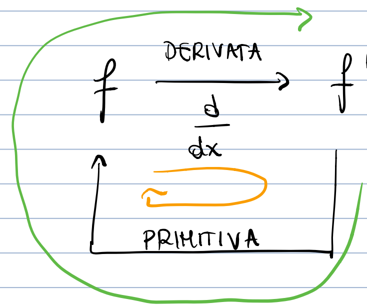

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

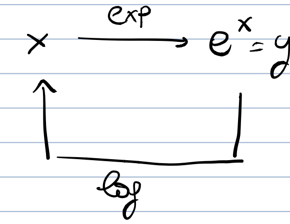
- $f(x)$: funzione che stiamo integrando
- $dx$: ci ricorda in che variabile stiamo integrando
- $a$, $b$: estremi di integrazione

come lo calcolo?

[ PARENTESI LUNGA

↳ <u>primitiva</u> di una funzione




**DEF** la primitiva di $g$ è una funzione $f$ t.c.

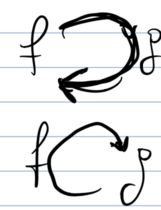
$$f' = g$$

$f$ è primitiva di $g$ SE $g$ è derivata di $f$

$f$ $g$ (primitiva) SE $f \xrightarrow{\text{DERIVO}} f' = g$

es: $g(x) = \cos(x)$, Devo trovare $f(x)$ t.c.

$$f'(x) = \cos(x)$$



$f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$\Longrightarrow f = \sin x$ è primitiva di $g = \cos x$

$g(x) = x^2$. Devo trovare $f$ t.c.

$$f'(x) = x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \longrightarrow f' = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$$

LA PRIMITIVA NON È UNICA

se $f$ è primitiva di $g$

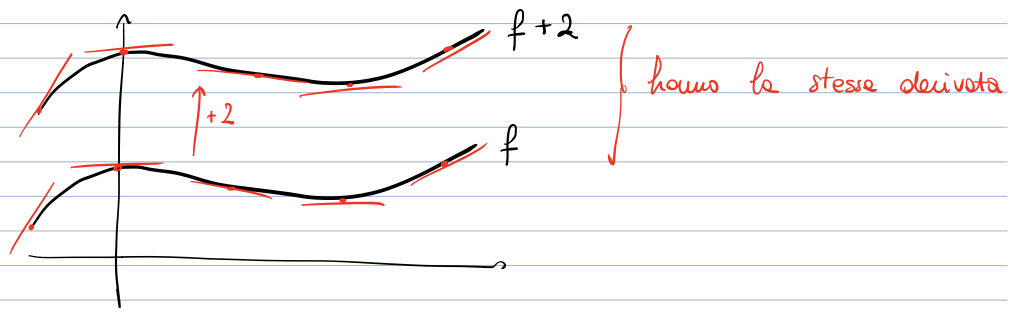
$\Rightarrow$ $f + c$ è primitiva di $g$ $\quad$ $c$ = costante

dim: se $f$ è prim. di $g$ $\Rightarrow$ $f' = g$

$(f+c)' = f' + c' = f' + 0 = f' = g$

c costante

$\Rightarrow$ $f+c$ è ancora primitiva di $g$




se $f$ è primitiva di $g$ $\Rightarrow$ $f+c$ TUTTE le primitive di $g$
(se $f, g$ si comporta bene)

Come si indica la primitiva di $g$?

$\hookrightarrow$ $\int dx \, g(x)$ = TUTTE LE PRIMITIVE DI $g$ $\hookrightarrow$ INTEGRALE INDEFINITO

$\hookrightarrow$ mancano gli estremi

FINE PARENTESI LUNGA

Teo : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

F é una primitiva di f a vostra scelta

ovvero $F(x) \in \int f(x)\,dx$

es: $\int_1^2 dx\, x^2$

→ cercare una primitiva di $x^2$, ovvero risolvere

$$\int dx\, x^2 = \frac{x^3}{3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

↳ ne devo scegliere 1, $c = 0$ é comoda

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

→ valutare $F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$\Rightarrow \int_1^2 dx\, x^2 = \frac{7}{3}$$

e se avessi scelto $c = \frac{\pi}{14}$

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{14}$$

c si semplifica

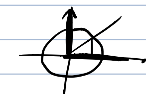
$$\int_1^2 dx\, x^2 = F_2(2) - F_2(1) = \frac{8}{3} + \cancel{\frac{\pi}{14}} - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{\pi}{14}} = \frac{7}{3}$$

NOTAZIONE COMPATTA

$$\int_1^2 dx\, x^2 = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=2} - \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=1} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

- $$\int_0^{\pi/2} dx \, \sin x = \Big[ -\cos x \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Big(-\cos(0)\Big) = 0 + 1 = 1$$

$(\cos x)' = -\sin x$



$$\int dx \, \sin x = -\cos x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{(INT. INDEFINITO)}$$

- regole di integrazione

INDEFINITI/DEFINITI

$$\int dx \, (f + g) = \int dx \, f + \int dx \, g$$

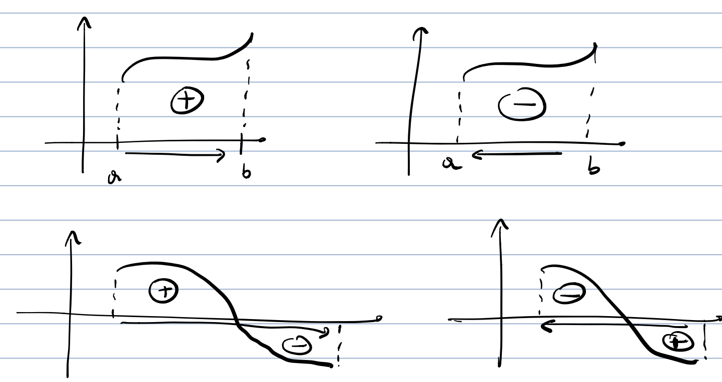
$$\int dx \, (c \cdot f) = c \int dx \, f$$

($c$ ↑ numero costante)

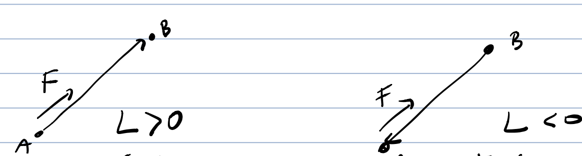
DEFINITI

$$\int_a^b dx \, f(x) = -\int_b^a dx \, f(x)$$

integrale definito = AREA CON SEGNO




es: lavoro




F "aiuta" moto     F "contrasta" moto

se quello che interessa è l'area senza segno $\int |f(x)| \, dx$

VOL 5 LIBRO MATEMATICAMENTE.IT (SITO)

pg PDF 320

9) $\int_0^{10} \sqrt[8]{x}\, dx = \left[ \frac{8}{9} x^{9/8} \right]_{x=0}^{x=10} = \frac{8}{9} 10^{9/8} - \frac{8}{9} 0^{9/8} = \frac{8}{9} 10^{9/8}$

↑ primitive di $\sqrt[8]{x} = x^{1/8}$

$x^{1/8+1} = x^{9/8} \xrightarrow{\text{derivo}} \frac{9}{8} x^{9/8-1} = \frac{9}{8} x^{1/8}$

$\frac{8}{9} x^{9/8} \xrightarrow{\text{derivo}} \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8} x^{1/8} = x^{1/8}$

- zoologia degli integrali elementari

- $\int dx\, x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ , $c \in \mathbb{R}$ , $\alpha \neq -1$

se $\alpha = -1$

- $\int dx \frac{1}{x} = \log|x| + c$
  - dominio $x \neq 0$
  - dominio $\log x$: $x > 0$
  - dominio $\log|x|$: $x \neq 0$

- $\int dx\, e^x = e^x + c$

- $\int dx\, a^x = \frac{a^x}{\log a} + c$
  - $[a^x]' = a^x \log a$
  - $\left[\frac{a^x}{\log a}\right]' = a^x$

- $\int dx \sin x = -\cos x + c$

- $\int dx \cos x = \sin x + c$

- $\int dx \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$

- $\int dx \log x = \dots$

↖ integrazione per parti

VOL 5 LIBRO MATEMATICAMENTE.IT (SITO) pg PDF 320

11) • $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{x^{2/3}}{x^{1/4}}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}\,dx =$

$= \int_1^2 x^{\frac{8-3}{12}}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{12}}\,dx =$

$= \left[ \frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} \right]_{x=1}^{x=2} = \left[ 12\,\frac{x^{17/12}}{17} \right]_{x=1}^{x=2} =$

$= \frac{12}{17}\left( 2^{17/12} - 1^{17/12} \right) = \frac{12}{17}\left( 2^{17/12} - 1 \right)$

• $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\log|x| + c = \log|x|^2 + c =$

$= \log(x^2) + c$

• $\int_0^{\pi/4} \frac{\sec(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,\frac{1}{|\cos x|}\,dx =$

$\sec(x) = 1/\cos(x)$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

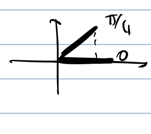
$\sqrt{x^2} = |x|$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[ \mathrm{tg}\, x \right]_{x=0}^{x=\pi/4} = 1 - 0 = 1$

$0 < x < \pi/4$ per estremi integrazione

$\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow |\cos x| = \cos x$

$[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$



$$\bullet \int 2^{x+3}\,dx = \int 2^x \cdot 2^3\,dx = 8\int 2^x dx = 8\,\frac{2^x}{\log 2} + c =$$

$$= \frac{2^{x+3}}{\log 2} + c$$

⌈ TRICK PER DERIVATE E INTEGRALI DI $a^x$ ⌉

$$a^x = e^{x\log a} \xrightarrow[\text{derivo}]{} e^{x\log a}\cdot \log a = a^x \log a$$
⌊ ⌋

12)

$$\bullet \int\left(\sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^2} + \frac{9}{\sqrt[5]{2x^3}}\right)dx = \int \sqrt[3]{x^5}\,dx - \int \frac{7}{x^2}\,dx + \int \frac{9}{\sqrt[5]{2x^3}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{5}{3}}\,dx - 7\int x^{-2}\,dx + \frac{9}{\sqrt[5]{2}}\int x^{-3/5}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - 7\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{9}{\sqrt[5]{2}}\,\frac{x^{-3/5+1}}{-3/5+1} + c =$$

$$= \frac{3x^{8/3}}{8} + \frac{7}{x} + \frac{9}{\sqrt[5]{2}}\,\frac{5x^{2/5}}{2} + c =$$

$$= \frac{3x^{8/3}}{8} + \frac{7}{x} + \frac{45\,x^{2/5}}{2^{6/5}} + c$$

$$\bullet \int\left(x^e - e^x + \frac{\pi}{\sqrt[3]{4x}}\right)dx = \int x^e\,dx - \int e^x dx + \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}}\int x^{-1/3}\,dx =$$

$$= \frac{x^{e+1}}{e+1} - e^x + \frac{\pi}{2^{2/3}}\,\frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c =$$

$$= \frac{x^{e+1}}{e+1} - e^x + \frac{\pi}{2^{2/3}}\,\frac{3x^{2/3}}{2} + c =$$

$$= \frac{x^{e+1}}{e+1} - e^x + \frac{3\pi}{2^{5/3}}\,x^{2/3} + c$$

**16|** $\int (x+1)^2 dx$

strada 1) $= \int (x^2+2x+1)\,dx =$

$= \int x^2 dx + 2\int x\,dx + \int 1\,dx =$ ($1 \to x^0$)

$= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + \frac{x^1}{1} + C =$

$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

strada 2) $\frac{1}{3}(x+1)^3 \xrightarrow{\text{derivata}} \frac{1}{3}3(x+1)^2 \cdot (x+1)' = \frac{1}{3}3(x+1)^2$

DERIVATA PRIMA

$\frac{1}{3}(x+1)^3$ è primitiva di $(x+1)^2$

$= \frac{(x+1)^3}{3} + C = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{3} + C =$

$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \underbrace{\frac{1}{3} + d}_{c}$

NB la strada 2 fallisce se

$\int (x^2+1)^2 dx$

strada 1) $= \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + c$

strada 2) cerco primitiva di $(x^2+1)^2$

$(x^2+1)^3 \xrightarrow{\text{derivata}} 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$