07-06-2023 - M. FRIGERIO $\quad x \to x-y$

1) Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ f^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{f}(-\omega)\, \hat{f}(\omega)$$

(banale se $f(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$)

METODO A: (con convoluzione)

Dato che $\mathcal{F}[g * g] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[g]^2$

con $\hat{f} := \mathcal{F}[f] = g$ allora:

$$\mathcal{F}[\hat{f} * \hat{f}] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[\hat{f}]^2$$

$$\Rightarrow \hat{f} * \hat{f} = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\hat{f}]^2\right]$$

Poi:

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, e^{-iky}\, dx\, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x+y)\, f(x)\, dx = f(-y)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f(y) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1} = R \circ \mathcal{F}$$
$$= \mathcal{F} \circ R$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\hat{f}]^2\right] = (\mathcal{F}\circ R)\left(R(f)^2\right)$$

$$= \mathcal{F}[f^2]$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f^2] = \hat{f} * \hat{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k-\omega)\hat{f}(\omega)\,d\omega$$

in $k=0$ $$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f^2](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt \quad \boxed{V}$$

METODO B:

- altro modo: identità di Parseval generalizzata,

$$\langle \hat{f}^*, \hat{f} \rangle = \langle f^*, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f^*})^*(\omega)\,\hat{f}(\omega)\,d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-\omega)\hat{f}(\omega)\,d\omega \quad \boxed{V}$$

Sia ora $G(t) \in L^2(\mathbb{R})$ con $\frac{dG}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$, mostrare che

$$S[G] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \frac{1}{T^2} G^2\,dt$$

può essere riscritta come:

$$(\star)\quad S[G] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega^2 + \frac{1}{T^2}\right) \hat{G}(-\omega)\hat{G}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

- Uso la relaz. prec. per $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G^2(t)}{T^2}\, dt$

poi uso: $\displaystyle\widehat{\left(\frac{dG}{dt}\right)} = -i\omega\, \hat{G}(\omega)$

per cui: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} i\omega\, \hat{G}(-\omega)\cdot(-i\omega)\hat{G}(\omega)\, d\omega$

per la relaz. prec.

1c.) sia $G \in L^2(\mathbb{R})$, $\frac{dG}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$,

consideriamo: $\displaystyle -\frac{d^2G}{dt^2} + \frac{1}{T^2} G(t) = \delta(t)\sqrt{2\pi}$

determinare $\hat{G}(\omega)$ e poi $S[G]$.

Per F.T. $\displaystyle\omega^2 \hat{G}(\omega) + \frac{1}{T^2}\hat{G}(\omega) = 1$

$\displaystyle\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1/T^2}$, $\left(G(t) = e^{-|t|/T}\right)$

$\displaystyle S[G] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1/T^2} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{T}{2}$ (usando $(\star)$)

2.) Sia $\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-1,1] \\ \frac{1}{|x|} & \text{altrimenti} \end{cases}$

Per $f \in L^2(\mathbb{R})$, sia:

$$(T_n f)(x) = \frac{\phi(x)}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Mostrare che $\|T_n\| = \|T_n^\dagger\| = 1 \quad \forall n$

ma che $T_n \to 0$ in senso forte

$y = \frac{x}{n}$

a) $\|T_n f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi^2(x)}{n} f^2\left(\frac{x}{n}\right) dx =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(ny) f^2(y) dy \leq \|f\|_{L^2}^2$

perche $|\phi(ny)| \leq 1$ $\hookrightarrow$ quindi $\|T_n\| \leq 1$

ma $\phi(ny) = 1 \quad \forall \; y \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$,

quindi mi basta scegliere f con supporto in $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ per dimostrare $\|T_n\| = 1$

b) $\langle g, T_n f \rangle = \langle T_n^\dagger g, f \rangle$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) \frac{\phi(x)}{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(ny) \sqrt{n}\, g^*(ny) f(y) dy$$

Quindi: $T_n^\dagger g = \sqrt{n}\,\phi(nx)\,g(nx)$

$$\|T_n^\dagger g\| = \int_{-\infty}^{+\infty} n\,\phi^2(nx)|g(nx)|^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(y)\,|g(y)|^2 dy \le \|g\|^2_{L^2}$$

quindi $\|T_n^\dagger\| = 1$ come prima

Siccome $\phi(ny) \to 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (q.o.)

è facile vedere che $\|T_n f\| \to 0$

(posso portare il limite nell'integrale per conv. dominata)

Quindi $T_n \to 0$ in senso forte.

Grazie a $\langle g, T_n f\rangle = \langle T_n^\dagger g, f\rangle$,

anche $T_n^\dagger \to 0$ in senso forte.

3) Si considerino le distrib. temperate:

$$\langle f_n | \varphi \rangle = \int_{-1}^{+1} x^n \varphi(x)\,dx$$

Mostrare che f_n converge in $S'(\mathbb{R})$
Valutare le loro norme in $L^2(\mathbb{R})$

a) x^n in $[-1,1] \to 0$ q.o. per $n \to +\infty$

$$|\langle x^n, f \rangle| \leq \int_{-1}^{1} |x|^n \, |\varphi(x)| \, dx \leq$$

$$2 \sup_{[-1,1]} |\varphi(x)| \int_0^1 x^n \, dx = \frac{2}{n+1} \|\varphi\|_\infty \to 0$$

b) Nota che f_n su $L^2(\mathbb{R})$ è:

$$f_n(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \cdot x^n$$

$$\|f_n\|^2 = \int_{-1}^{1} x^{2n} \, dx = \frac{2}{2n+1}$$