5/06/2023 – M. FRIGERIO

1) Usando i coeff. di Fourier di opportuni polinomi in $[-\pi,\pi]$, calcolare $\zeta(2n)$ per $n=1,2,3,4,5$, dove $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$ $(\mathrm{Re}\,z>1)$ è la ζ di Riemann.

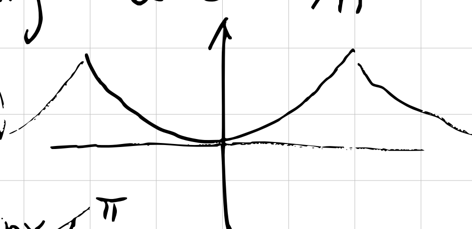
$f(x)=x$, estesa per periodicità in $[-\pi,\pi]$

$$c_n^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx}\,dx = \frac{i x e^{-inx}}{2\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{n}\,dx$$

$$= \frac{i(-1)^n}{n}, \qquad c_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

N.B.: $f(x)$ non è continua in $k\pi$, ma i suoi coeff. decadono comunque come $1/n$

$\frac{x^2}{2}$ prolungata per periodicità



$$c_n^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}\,dx = \underbrace{\cancel{\frac{ix^2e^{-inx}}{4\pi n^2}}}_{0}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{n}\,c_n^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad C_n^{(2)} = \frac{+(-1)^n}{n^2}, \quad C_0^{(2)} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

allora per contin. in π:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(e^{in\pi}+e^{-in\pi}\right) + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$$

(potevo ricavarlo da Parceval su $C_n = \frac{i(-1)^n}{n}$)

$f(x) = ax^3 + bx$. Se impongo deriv. e contin. in $k\pi$, allora per teorema $C^p \Longrightarrow c_n \sim 1/n^p$ ho ciò che volevo:

$$a = \frac{1}{3!}, \quad f(\pi) = f(-\pi) \Rightarrow f(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3!}\pi^3 + b\pi = 0 \quad \Rightarrow b = -\frac{\pi^2}{3!}$$

Parseval: $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{x^3}{3!} - \frac{\pi^2 x}{3!}\right|^2 dx = \left(C_0^{(3)}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left|C_n^{(3)}\right|^2$$

so già che $|c_n^{(3)}|^2 = \frac{1}{n^6}$,

$$c_0^{(3)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{\pi^2 x}{3!}\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{2\pi^6}{945} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\Rightarrow \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

ES. per casa: trovare i polinomi di ordine 4, 5 e 6 che danno risp. $\zeta(8)$, $\zeta(10)$, $\zeta(12)$

soluzione: $\frac{x^4}{4!} - \frac{2\pi^2}{4!}x^2$, $\frac{x^5}{5!} - \frac{\pi^2}{(3!)^2}x^3 + \left(\frac{\pi^4}{(3!)^2} - \frac{\pi^4}{5!}\right)x$

e $\frac{x^6}{6!} - \frac{\pi^2 x^4}{3!\,4!} + \left(\frac{2\pi^4}{3!\,4!} - \frac{3}{6!}\right)x^2$

---

2) Sia $\hat{T}: f \longmapsto (\hat{T}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{1+(x-y)^2}\,dy$

definito su $L^2(\mathbb{R})$.

Dire se $\hat{T}$ è iniettivo e/o suriettivo, trovarne autovalori e autovettori.

Uso trasf. di Fourier che è isomorfismo su $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}[g*h] = \mathcal{F}[g]\cdot\mathcal{F}[h]$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[\hat{T}(f)] = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\omega) = \pi\hat{f}(\omega)e^{-|\omega|}$$

Siano f_1, f_2 t.c. $\hat{T}f_1 = \hat{T}f_2$.

Per isomorfismo, segue che: $\forall \omega$!!!

$$\mathcal{F}[\hat{T}(f_1) - \hat{T}(f_2)] = \pi e^{-|\omega|}\left(\hat{f}_1(\omega) - \hat{f}_2(\omega)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}_1(\omega) = \hat{f}_2(\omega) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

quindi è INIETTIVO.

Per suriettiv., sia $g \in L^2(\mathbb{R})$. Cerco f t.c. $T(f) = g$. Per trasf. di F:

$$\pi\hat{f}(\omega)e^{-|\omega|} = \hat{g}(\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{e^{|\omega|}}{\pi}\hat{g}(\omega)$$

ma questa in generale <u>NON</u> è in $L^2(\mathbb{R})$, quindi $\hat{T}$ non è suriettivo.

Per autovett.: $\mathcal{F}[T(f)] = \mathcal{F}[\lambda f] = \lambda \mathcal{F}[f]$

$\Rightarrow \pi e^{-|\omega|} \hat{f}(\omega) = \lambda \hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega)\left[\pi e^{-|\omega|} - \lambda\right] = 0$

$\hat{f}(\omega) = 0$ (no autovett.!!!), $\lambda = \pi e^{-|\omega|}$

richiede $\hat{f}(\omega) = 0$ ovunque tranne event.

in ω^* e $-\omega^*$ cosicché $\lambda = \pi e^{\omega^*}$,

ma comunque $\hat{f}(\omega) = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ (q.o.)

$\Rightarrow$ non ha autovett.

- Che grado di regolarità hanno le funzioni $\in Im[\hat{T}]$?

$g = Tf \Rightarrow \hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|} \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow g(x) \in C^0$. Inoltre $\omega^k e^{-|\omega|} \hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$

quindi $g \in C^\infty$.

- Se $\{f_n\}$ è SONC in $L^2(\mathbb{R})$, allora $\{Tf_n\}$ è ancora completo?

$\{\hat{f}_n\}$ è SONC per proprietà della trasf.

$\tilde{F}[T f_n] = \pi e^{-|\omega|} \hat{f}_n(\omega)$ è completo?

$\langle \hat{\pi} e^{-|\omega|} \hat{f}_n(\omega), \hat{h} \rangle = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad \langle \hat{f}_n(\omega), \bar{e}^{|\omega|} \hat{h} \rangle = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow$ siccome $\hat{f}_n$ SONC, $\Rightarrow e^{-|\omega|} \hat{h} = 0, \ \hat{h} = 0$ ✓

Quindi è completo.

---

3) Calcolare i coeff. della serie di Taylor centrata in $z=0$ di $-\dfrac{\log(1-z)}{1-z}$

e usarli per calcolare $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} \frac{\log(1-z)}{z^3\,(1-z)}\,dz$

Dare il raggio di convergenza.

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

per $|z|<1$

C_n da $-\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right)\left(1 + z + z^2 + \dots\right)$

$C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$ numeri armonici

$r = 1$, $\operatorname{Im} z = \pm 1$ converge?

$$I = -2\pi i \, H_2 = -3\pi i$$