29/05/2023 – M. FRIGERIO

1) (da es. 2 prova 29/06/2020)

Considerare lo svil. in serie di Fourier di

$f(x) = x\sqrt{|x|}$ in $[-\pi, \pi]$.

- Calcolare $(S_{+\infty} f)(\pi)$ e $(S_{+\infty} f)(\frac{\pi}{4})$

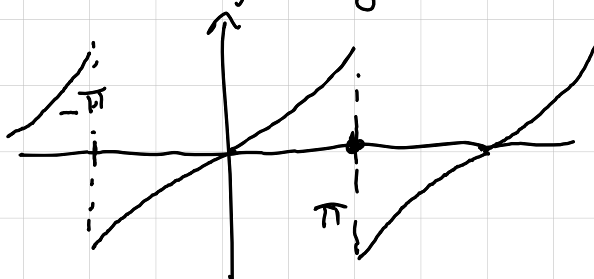
f è dispari $\Rightarrow$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\sqrt{|x|} \sin(kx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{3/2} \sin(kx)\,dx$, $a_k = 0$

In $\pi/4$ è continua e deriv.

$\Rightarrow (S_{+\infty} f)(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^{3/2}}{8}$

In π ha un salto:



$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \pi\sqrt{\pi}$

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\pi\sqrt{\pi}$

$(S_{+\infty} f)(\pi) = 0 = \frac{\pi\sqrt{\pi} + (-\pi\sqrt{\pi})}{2}$

punto medio

• Dire se $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ è in $\ell^2(\mathbb{R})$ e o in $\ell^1(\mathbb{R})$. Calcolarne le rispettive norme ove esistono.

$\{b_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$ perché $x\sqrt{|x|} \in L^2([-\pi,\pi])$

e vale Parseval: $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}^2$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(x\sqrt{|x|}\right)^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^3\,dx = \frac{\pi^4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \|\{b_n\}\|_{\ell^2} = \frac{\pi^3}{2}$$

$\{b_n\}$ non può essere in $\ell^1(\mathbb{R})$, altrim. $S_N f$ convergerebbe uniformemente

In altri termini, per Weierstrass:

$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin kx$ è tale che $|f_k(x)| \leq |b_k|$

Se fosse $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$, Weierstrass implicherebbe che $S_N f$ converga uniform. in ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Ma questo non può essere perché è discontinua.

2) Si consideri l'operatore:

$$\hat{I} : f \in L^2([-\pi,\pi]) \longmapsto (\hat{I} f)$$

che a $f(x)$ associa la funzione

$$(\hat{I} f)(x) = c_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} -i \left(\frac{c_k}{k} e^{ikx} + \frac{c_{-k}}{-k} e^{-ikx} \right)$$

dove $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

Dimostro che $(\hat{I} f) \in L^2([-\pi,\pi])$

$\rightarrow$ $(\hat{I} f)$ è definita da una serie di Fourier i cui coeff. $\left(\{c_0, -\frac{i c_k}{k}, \frac{i c_{-k}}{k} \right)$ sono in $\ell^2(\mathbb{C})$, poiché lo erano i $\{c_k\}$ per $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Per isomorfismo, $\hat{I} f \in L^2([-\pi,\pi])$.

N.B.: $\hat{I}$ è <u>lineare</u>

N.B. 2: f può avere valori <u>complessi</u>.

Norma operatoriale di $\hat{I}$?

$$\sup_{f \in L^2([-\pi,\pi])} \frac{\| \hat{I} f \|^2_{L^2([-\pi,\pi])}}{\| f \|^2_{L^2([-\pi,\pi])}} = \| \hat{I} \|^2_{op.}$$

$$= \sup_{\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{C})} \frac{\| \{\frac{c_k}{k}\} \|_{\ell^2}^2}{\| \{c_k\} \|_{\ell^2}^2}$$

grazie a isomorfismo $\ell^2 \longleftrightarrow L^2$ e identità di Parseval (i fattori $\frac{1}{2\pi}$ si cancellano)

$= 1$ perché scelgo $\{c_k\} = \{1, 0, 0 \dots\}$

e $\| \{\frac{c_k}{k}\} \|^2 \leq \| \{c_k\} \|^2$

Dimostrare che $\{\dots \frac{-i c_{-k}}{-k}, \dots, c_0, \dots \frac{-i c_k}{k} \dots\}$ è anche in $\ell^1(\mathbb{C})$ ($\in \ell^2(\mathbb{C})$)

$\Rightarrow$ Siccome $\{c_k\}_{k=0}^{\pm\infty} \in \ell^2(\mathbb{C})$,

si ha definitivamente $|c_k| < \frac{M}{\sqrt{k}}$

perché altrim. $\sum_{k=0}^{\pm\infty} |c_k|^2$ divergerebbe.

Allora $\left| \frac{-i c_k}{k} \right| < \left| \frac{M}{k\sqrt{k}} \right|$ che converge in norma ℓ^1.

Quindi $\{\dots, \frac{-i c_{-k}}{-k}, \dots, c_0, \dots, \frac{-i c_k}{k}, \dots\}$

converge assolutam. (in norma ℓ^1).

Dunque $(\hat{I} f)$ è continua.

N.B.: quando $\hat{I}f$ è anche derivabile:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}f)(x) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-iC_k}{k} e^{ikx} + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=+1}^{+\infty} \frac{-iC_{-k}}{-k} e^{-ikx} =$$

$= f(x) - C_0$ (posso scambiare somme e deriv. per conv. assoluta)

3) Se f periodica di periodo 2π e C^p, allora:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

posso scambiare $\frac{\partial}{\partial x}$ e serie per conv. assol./unif.

$$\Rightarrow \frac{\partial^p f}{\partial x^p} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^p e^{ikx} c_k$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k^p c_k| < +\infty$$
$$= M$$

$$\Rightarrow |c_k| < M/|k|^p$$

4) Su richiesta degli studenti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz.$$

Applico il lemma di Jordan nella versione con esponenziale:

$$\int_{\gamma_R^+} g(z) e^{iaz}\, dz \xrightarrow{\text{per } R \to +\infty} 0$$

<u>se</u>:

1. $\lim_{|z| \to +\infty} g(z) = 0$

<u>e</u>

2. $\operatorname{Re} a > 0$, cosicché e^{iaz} per $z = iy$ con $y > 0$ sia

$$e^{iaz} = e^{-ay} = e^{-i \operatorname{Im} a\, y}\, e^{-\operatorname{Re} a\, y} \longrightarrow 0$$

per $y \to +\infty$

N.B.: γ_R^+: $Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$

$\boxed{V}$

Nel nostro caso: $\frac{z^3}{(z^2+1)^2} \longrightarrow 0$ per $|z| \to +\infty$

e e^{iz} è ok nel semipiano superiore perché $a = 1 > 0$. Allora chiudo con γ_R^+.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}, z = i\right) = \frac{1}{4e}$$

(espandendo $\frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2}$ attorno a $z = i$ al 1° ordine o equiv. con derivate).

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \frac{\pi i}{2e}$$

$$\Rightarrow I = \mathrm{Im}(\cdots) = 2\pi/e$$

✓

5) serie di Fourier in ' di e^{-ax} per $a \in \mathbb{R}$.

Uso la base esponenziale normalizz. in $[-1,1]$:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\pi n x} e^{-i\pi m x} dx = \delta_{n,m}$$

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ax} e^{-i\pi k x}\, dx =$$

$$= \frac{\sinh(a)}{a + \pi i k}.$$

fattore di normalizz. in $[-1,1]$

$$\|f\|^2_{L^2([-1,1])} = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-2ax}\, dx = \frac{\sinh(2a)}{a}$$

$$\frac{\sinh(2a)}{a} = 2|c_0|^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|^2 =$$

$$= \frac{2\sinh^2 a}{a^2} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh^2 a}{a^2 + \pi^2 k^2} \quad \left(\begin{array}{l}\sinh(2a) = \\ 2\sinh(a)\cosh(a)\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\cosh(a)}{a} - \frac{\sinh(a)}{a^2}}{2\sinh(a)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \pi^2 k^2}$$

$$\frac{a\coth(a) + 1}{2a^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \pi^2 k^2}$$