$$(S_N f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$f \in L^1([-\pi,\pi])$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

$$\delta_N^2 = \|f\|^2_{L^2([-\pi,\pi])} - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + \dots + b_N^2\right]$$

se $f \in L^2([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$)

In partic., $\forall f \in L^2([-\pi,\pi])$

$\exists\ (S_N f)(x)\ \forall N$ e

$\lim_{N\to+\infty} (S_N f)(x)$ converge a f IN NORMA L^2 (IN L^2)

Ma $f \in L^2$ é cl. di equiv.!!!

Convergenza in L^2 <u>non implica</u> conv. puntuale a f, né convergenza in generale.

(può divergere su ins. di misura nulla!!)

Quindi risp. a $L^2([a,b])$ la serie di Fourier induce un <u>isomorfismo</u> di sp. di Hilbert con $\ell^2(\mathbb{R})$.

Infatti $\delta_N^2 \to 0$ implica che

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{\|f\|_{L^2}^2}{\pi} < +\infty$$

N.B.: $\ell^1(\mathbb{R}(\mathbb{C})) \subset \ell^2(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$

Per conv. puntuale:

- Se f è continua a tratti (n. finito di salti) e limitata, in varietà allora $(S_N f)(x)$ converge puntualm. a f dove f è continua e a $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)+f(x_0-\varepsilon)}{2}$ se x_0 è p.to di discont. per f
- Se f è continua, $(S_N f)(x)$ converge q.o. a f (anche se $f \in L^p$ per $p \in (1,+\infty]$)

(thm. Carleson '66)

- Se f è derivabile in x_0,

$(S_N f)(x_0) \to f(x_0)$

- Se $f \in C^p([a,b])$,

$(S_N f)(x) \to f(x)$ in $[a,b]$ ~~per~~

e $\begin{matrix} |a_n| \leq \\ |b_n| \leq \end{matrix} \dfrac{\| f^{(p)} \|_{L^1}}{|n|^p}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx = \frac{a_n + i b_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $f \in L^2([a,b])$ a val. in $\mathbb{R}$,

allora $c_{-n} = \dfrac{a_n - i b_n}{2} = c_n^*$

altrim. c_n e c_{-n} sono indip.

(ma comunque $c_{-n} = \dfrac{a_n - i b_n}{2}$)

N.B.: se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$

poiché $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_n| + |b_n|$

per Weierstrass M-test segue

che $(S_N f)(x)$ converge assolutam.

(e quindi uniform.) a f $\forall x \in [-\pi, \pi]$

Es. 1: $\|f\|_{L^1}$ e $\|f\|_{L^2}$ di

$$f(x) = \frac{1}{ix+1}$$

$\sqrt{P} A$ with $\sqrt{P} = \sqrt{P}^\dagger = U D^{1/2} U^\dagger$

$$\mathrm{tr}\, A^\dagger P A = \sum_j \lambda_j^2(A), \quad \mathrm{tr}\, B^\dagger P B = \sum_j \lambda_j^2(B)$$

$$|\mathrm{tr}\, A^\dagger P B| \leq \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, A^\dagger P A + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, B^\dagger P B$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \left(\lambda_j^2(A) + \lambda_j^2(B)\right)$$

$$s = \cancel{\cos\theta}\ \sinh r$$

$$\overline{}\quad \cosh^2(r)$$

$$L^2([-1,1])$$

$$F_y f = \int_{-y}^{y} \frac{f(x)}{x - iy}\, dy$$

$$\|F_y\|^2 = \|g\|^2 = \frac{1}{y}\int_{-1}^{1} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2y}$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k^2} = \frac{\pi/2}{\sinh(\pi/2)}$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4k^2} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi/2)$$

$$e^{-|x|} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{1+4k^2}\right]$$

$$+ \frac{1+e^{-\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{\cancel{2k^2+2k+1}}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\pi} e^{-x+ikx}\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2}$$