15/05/2023

Sp. di Hilbert: sp. vett., normato, completo t.c. la norma è indotta da un prod. scalare (sesquilineare).

N.B: normato $\longrightarrow$ metrico

Thm: sia $\mathcal{H}$ di Hilbert, e sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un SONC ($\langle u_j, u_k\rangle = \delta_{jk}$ e $[\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}]^{\perp} = \emptyset$). Allora

$\forall v \in \mathcal{H}$: detti $v_k = \langle u_k, v\rangle$,

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k|^2, \quad v = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle u_k, v\rangle u_k$$

In partic: $\mathcal{H}$ è isomorfo a $\ell^2(\mathbb{C})$

N.B.: $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert si dice SEPARABILE se ammette SONC numerabile.

Non significa che ogni sottinsieme

lin. indip. di $\mathcal{H}$ é numerabile!!!
(completa)

$$\min_{c_0 \dots c_3} \int_{-1}^{1} \left| \sin x - \sum c_j P_j(x) \right|^2 dx$$

con $\int_{-1}^{1} P_j(x) P_k(x) = h_k \delta_{jk}$, $\quad h_n = \dfrac{2}{2n+1}$

e $P_j(1) = 1$

n.b.: $\quad x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$

infatti, supponiamo $+ d_n P_{n-2}(x)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x P_n(x) P_{n-2}(x) \, \cancel{d}x = d_n h_{n-2}$$

ma $x P_{n-2}(x)$ é di ordine $n-1$

$\Rightarrow \perp$ a $P_n \Rightarrow d_n = 0$ e così via.

$P_0(x) = 1$, $\quad P_1(x) = x$

$c_n h_{n-1} = a_{n-1} h_n$

Per Legendre, già so che $b_n = 0$

Per $x=1$ $\quad 1 = a_n + c_n$

$\Rightarrow (1-a_n)h_{n-1} = a_{n-1}h_n$

$\rightarrow (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - nP_{n-1}(x)$

$\langle \sin(x), P_1(x) \rangle = -2\cos(1) + 2\sin(1)$

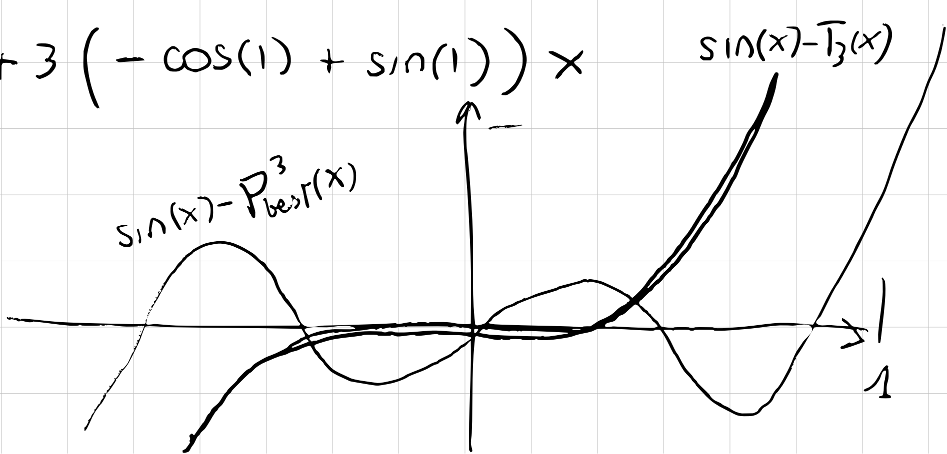
$\langle \sin(x), P_3(x) \rangle = 28\cos(1) - 18\sin(1)$

$\Rightarrow \frac{7}{2}\left(28\cos(1) - 18\sin(1)\right)\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$

$+ \frac{3}{2}\left(-2\cos 1 + 2\sin(1)\right)x$

$= 7\left(7\cos(1) - \frac{9}{2}\sin(1)\right)\left(5x^3 - 3x\right)$

$+ 3\left(-\cos(1) + \sin(1)\right)x$



2.) Consideriamo $\mathrm{Tr}: A \longrightarrow \mathrm{tr} A$

sullo sp. vett. delle matrici $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$

É limitato?

Devo determinare una norma sullo sp.

Ad es. $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}\, A^{+} A}$

$\Rightarrow$ sp. di Hilbert-Schmidt

$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, A^{+} B$

allora $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, \mathbb{I} \cdot A = \langle \mathbb{I}, A \rangle$

$\Rightarrow$ é limitato e $\|\mathrm{Tr}\| = \|\mathbb{I}\| = \sqrt{n}$

Per quali matrici P si ha che

$\mathrm{Tr}(A^{+} P B) = \langle A, B\rangle$ é prod. scal. (sesquilin.)?

$\langle A, A\rangle \geq 0, \quad = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A^{+} P A) \geq 0 \quad \forall A$

$\mathrm{Tr}(A^{+} P A) = 0 \quad \Rightarrow A = 0$

$$\sum_{j,k,\ell} A^*_{kj} P_{k\ell} A_{\ell j} \geq 0 \quad \forall A$$

$$\Rightarrow A_{\ell j} = (\underline{v}_j)_\ell$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}^\dagger P \underline{v} \geq 0 \quad \forall v \quad = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P > 0$$

$$\langle A,B\rangle = \overline{\langle B,A\rangle} \Rightarrow \mathrm{Tr}(A^\dagger P B) = \mathrm{Tr}(B^T \bar{P} \bar{A})$$

$$= \mathrm{Tr}(A^\dagger P^\dagger B)$$ ← T dentro Tr

$$\Rightarrow \quad P^\dagger = P$$

N.B.: è di Hilbert perché isomorfo a $\mathbb{C}^N$, completo, e ogni prod. scal. induce norma che rispetta dis. triang. per Cauchy-Schwartz!

$$\oint_{|z|=2} z^2 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right) dz$$

sing. essenz. in $z = -1$

N.B.: $\sin(z+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z+1)^k$ converge ovunque ($|z| < +\infty$) $\Rightarrow$ per $z+1 \longleftrightarrow \frac{1}{z+1}$

$$\sin\left(\frac{1}{z+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{(z+1)^k} \quad \text{e'}$$

la serie di Laurent e converge

$\forall\ z \neq -1 \quad (|z+1|>0)$

$z^2 = (z+1-1)^2 = (z+1)^2 - 2(z+1) + 1$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, -1) = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow I = i\,\frac{5\pi}{3}$