1) Considerare l'operatore: $(a \in \mathbb{R})$

$$\hat{T}_a := e^{a\partial_x} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n \partial_x^n}{n!} \quad \text{su } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

- Dimostrare che $\hat{T}_a f$ converge in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e che $\hat{T}_a f = f(x+a)$
- Trovare la norma di $\hat{T}_a$ e dire se è limitato
- Dedurre l'estensione di $\hat{T}_a$ a $L^2(\mathbb{R})$ per il teorema di Hahn-Banach
- Dimostrare che $\hat{T}_a$ converge debolmente all'operatore nullo per $a \to +\infty$ e converge fortemente all'identità per $a \to 0$

a) Sia $\hat{T}_{a,N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n \partial_x^n}{n!}$

$$\mathcal{F}[\hat{T}_{a,N} f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-iwa)^n}{n!} f(x) e^{-iwx} dx$$

$$\longrightarrow \quad e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega) \quad \text{per } N \to +\infty$$

$$\Rightarrow (\hat{T}_a f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega(x-a)}\, d\omega =$$

$$= f(x-a) \quad \boxed{V}$$

$$= 1 \quad \forall f$$

b) $$\|\hat{T}_a\| = \sup_{f\in S} \frac{\|f(x-a)\|_{L^2}}{\|f(x)\|_{L^2}} = 1$$

c) $\hat{T}_a$ é op. lineare continuo ($\Leftrightarrow$ limitato) su sottosp. denso ($S(\mathbb{R})$) in sp. di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ (in partic. di Banach)

$\Rightarrow$ $\hat{T}_a$ é estendibile univocamente su tutto $L^2(\mathbb{R})$ e sarà:

$$\hat{T}_a f = f(x-a) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

(ma $\hat{T}_a \neq e^{a\partial_x}$ su $L^2(\mathbb{R})$!!!)

RIPASSO CONVENZIONI TRASF. DI FOURIER:

- $\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega t}\, dt, \ f \in L^1(\mathbb{R})$

estendibile a $L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

Se $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$,
allora: $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$

- $f, g \in L^2(\mathbb{R})$: $\quad \langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}$

identità di Parseval generalizzata.

- $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = Rf, \quad Rf(x) := f(-x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ R = R \circ \mathcal{F}, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$

- Se $f \in S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$,

$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = -i\omega \hat{f}(\omega)$

- $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$