10/05/2023 - M. FRIGERIO

Voglio approssimare $\sin x$ con un polinomio di grado 3 in $[-1, 1]$.

N.B.: non sarà necess. il pol di Taylor di $\sin x$.

Imposto un probl. di minimizz. in $L^2([-1,1])$, perché è sp. di Hilbert e sfrutto il suo prodotto interno:

$$\min \int_{-1}^{+1} |\sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d|^2 dx$$

as in $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \{1,\dots,N\}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{|y_i - kx_i - \tilde{x}_0|^2}{\sigma^2}$

$$\sum_{k=0}^{3} c_k P_k(x) \quad \text{t.c.} \int_{-1}^{1} P_k(x) P_j(x)\, dx = \delta_{jk} h_k$$

$$\int_{-1}^{1} \left|\sin x - \sum_{k=0}^{3} c_k P_k(x)\right|^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sin^2 x - 2 \sum_{k=0}^{3} c_k \int_{-1}^{1} \sin(x) P_k(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{3} c_k^2 h_k$$

$$\frac{\partial}{\partial c_k}(\ldots) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 c_k h_k - 2\int_{-1}^{1} \sin(x)\, P_k(x) \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{h_k}\int_{-1}^{1} \sin(x)\, P_k(x)\, dx$$

In partic., se $p_0(x) = 1$, $h_0 = 2$,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin(x)\, dx = 0$$

similm. per $P_k(x)$ ~~dispari~~ pari

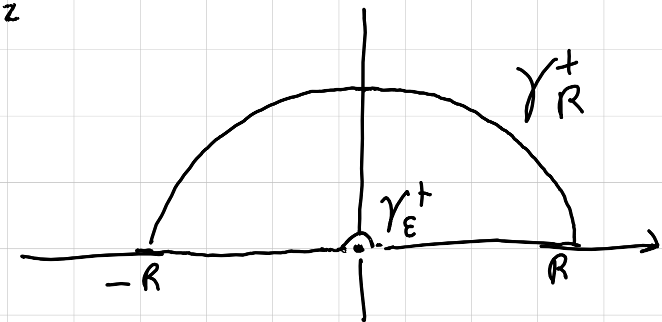
$$\int_{-1}^{1} \sin^2(x)\, dx - \sum_{k=0}^{3} c_k^2 h_k$$

$$x P_k(x) = a_k P_{k+1}(x) + c_k P_{k-1}(x)$$

$$h_n = \frac{2}{2n+1},$$

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2}\,dx \quad , \quad a>0$$




$$\Rightarrow \quad \cos^2(ax) - \sin^2(ax) = \cos(2ax)$$

$$= 1 - 2\sin^2(ax) \Rightarrow \sin^2(ax) = \frac{1-\cos(2ax)}{2} =$$

$$= \frac{1 - e^{2iax} + 1 - e^{-2iax}}{4}$$

contributo di $\gamma_\varepsilon^+$ per lemma piccoli cerchi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1-e^{2iax}\right)}{4x^2}\,dx \quad \underbrace{-\pi i \,\frac{(-2ia)}{4}}_{} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{2iax}}{4x^2}\,dx = \frac{\pi a}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1-e^{-2iax}\right)}{4x^2}\,dx + -i\pi\,\frac{2ia}{4} = -2\pi i\,\frac{2ia}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^{-2iax}}{4x^2}\,dx = \frac{\pi a}{2}$$

$$\Rightarrow I = \pi a$$

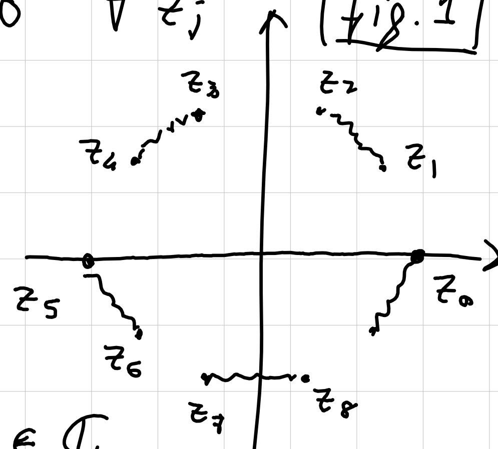
3) $$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\sqrt{z^{10}-1}}\,dz$$

10 singolarità, in $z_j = e^{\frac{2\pi i j}{10}} = e^{\frac{i\pi j}{5}}$, $j=0,\dots,9$

<u>NON</u> sono poli:

$$\lim_{z\to z_j} \frac{(z-z_j)}{\sqrt{z^{10}-1}} = 0 \quad \forall z_j$$

$\boxed{\text{fig. 1}}$




Vicino a $z_j$:

$$\frac{1}{\sqrt{z^{10}-1}} \sim \frac{\tilde{C}}{\sqrt{z-z_j}}$$

con $\tilde{C} = \prod_{k\neq j} \frac{1}{\sqrt{z_j - z_k}} \in \mathbb{C}$

Quindi ho un branch point in ogni $z_j$

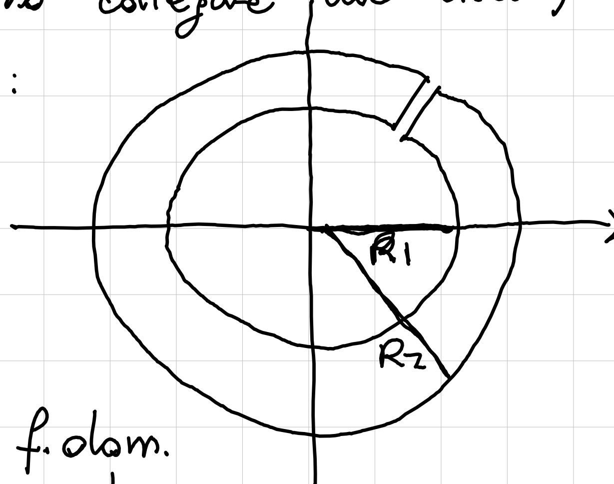
Posso mettere i tagli come voglio, scelgo di collegare a coppie gli $z_j$ (fig. 1)

Il contorno $|z|=2$ ($\gamma: \theta \in [0,2\pi] \to 2e^{i\theta}$)
é fuori dai branch cuts.

Per risolvere l'integrale iniziale studio:

$$I(R) = \int_{|z|=R} \frac{1}{\sqrt{z^{10}-1}} dz \quad \text{per } R \geq 2$$

Siccome per $|z| \geq 2$ l'integranda é olomorfa (con la scelta dei tagli che ho fatto) allora posso collegare due circonf. di raggi $R_1$ e $R_2$:




$$\int_{\gamma_{R_1} - \gamma_{R_2}} \frac{1}{\sqrt{z^{10}-1}} dz = 0$$

↳ perché integr. di f. olom. su cammino chiuso

$\Rightarrow I(R_1) = I(R_2) = I(2)$

ma: $|I(R)| \leq \frac{2\pi R}{\sqrt{R^{10}-1}} \to 0 \Rightarrow I(2) = 0$