

Def (Spazio pre-Hilbertiano): Uno spazio vettoriale \mathcal{H} (su \mathbb{C}) è detto pre-Hilbertiano se su di esso è definito un prodotto interno.

$(\cdot | \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\forall x, y \in \mathcal{H}$

- $(x | x) \geq 0$ e $(x | x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(x | y+z) = (x | y) + (x | z)$ e viceversa per il primo elemento
- $(x | \lambda y) = \lambda (x | y)$ $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\overline{(x | y)} = (y | x)$

onio è sesquilineare, def. positivo e non degenero

Il prodotto interno ci permette di definire una norma $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

Def: Uno spazio è detto di Hilbert se soddisfa lo schema del parallelogramma

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Def: Uno \mathbb{C} -spazio vettoriale equipaggiato con un prodotto interno si dice di Hilbert se la norma indotta dal prodotto interno lo rende di fatto uno spazio di Banach onio se è completo nella topologia indotta dalla norma.

↑ ogni serie di Cauchy è convergente
 $\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$

• Esercizio 23/09/2019

Nello spazio \mathcal{H} delle matrici complesse $n \times n$ con prodotto interno

$(B, A) = \text{Tr}(B^* A)$ si consideri l'op. lineare $\hat{K} : A \mapsto [Q, A]$ con

Q fissa.

i) Determinare op \hat{K}^* , è iniettivo?

ii) Si dimostri che $\text{Ran}(\hat{K}) \neq \mathcal{H}$

iii) Si consideri il caso in cui Q è hermitiana: mostrare che gli autovalori di \hat{K} sono $\lambda_i - \lambda_j$, dove $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ è lo spettro della matrice Q ; nel caso in cui tutti gli autovalori di Q sono non degeneri determinare lo dim. di $\text{Ker } \hat{K}$

$$\mathcal{H} \equiv M_{n \times n}(\mathbb{C}) \quad : \quad \hat{K}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ lineare}$$

Lo linearit  e lo stesso che avete visto al corso di geometria 1, i.e.

$$\hat{K}(A+B) = \hat{K}(A) + \hat{K}(B) \quad \hat{K}(\lambda A) = \lambda \hat{K}(A) \quad \forall A, B \in \mathcal{H} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\hat{K}: A \mapsto [Q, A] \quad \text{dove } [\cdot, \cdot] \text{   detto commutatore (parentesi di Lie)}$$

e sulle matrici agisce come segue

$$[Q, A] = QA - AQ \quad \text{con il prodotto tra matrici.}$$

i) \hat{K}^+ ?   iniettivo?

\hat{K}^+   l'op. aggiunto a \hat{K} .

Thm: Per ogni ~~funzione~~ ^{operatore} lineare $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ esiste un operatore \hat{A}^+ detto aggiunto, tale che $(x, \hat{A}y) = (\hat{A}^+x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

Per cui consideriamo $A, B \in \mathcal{H}$

$$(A, \hat{K}(B)) = (\hat{K}^+(A), B)$$

"

$$(A, [Q, B]) = (A, QB - BQ) = (A, QB) - (A, BQ)$$

$$= \text{Tr}(A^+QB) - \text{Tr}(A^+BQ) \quad \text{Lo traccio   ciclica!}$$

$$= \text{Tr}(A^+QB) - \text{Tr}(QA^+B)$$

$$= \text{Tr}((Q^+A)^+B) - \text{Tr}((AQ^+)^+B)$$

$$= (Q^+A, B) - (AQ^+, B) = ([Q^+, A], B) = (\hat{K}^+(A), B)$$

Dunque $\hat{K}^+ = [Q^+, \cdot]$.

Per controllare se \hat{K}^+   iniettivo ($\forall A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow \hat{K}(A) \neq \hat{K}(B), A \neq B$)

controlliamo se $\text{Ker}(\hat{K}^+) = \{0\}$ dove $0 \in \mathcal{H}$   la matrice nulla

Recall: $\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Andiamo a cercare dunque se $\exists A \in \mathcal{H}$ t.c. $\hat{K}^+(A) = 0$

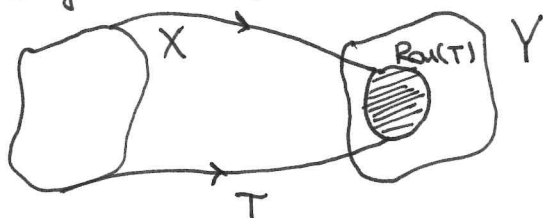
Dato lo forma di \hat{K}^+ , notiamo che se $A \in \text{Ker}(\hat{K}) \Rightarrow A$ commuta con Q^+ . Ma evidentemente $Q^+ \in \mathcal{H}$ e dunque

$$\hat{K}^+(Q^+) = [Q^+, Q^+] = 0 \Rightarrow \text{Ker}(\hat{K}^+) \neq \{0\}$$

Allo stesso modo si mostra che \hat{K} non è invertibile.

ii) Def: Sia X, Y spazi vettoriali e $T: X \rightarrow Y$ lineare.

Il Range di T , $\text{Ran}(T)$ è l'immagine di X sotto l'azione di T



Ciò che vogliamo mostrare è che $\text{Ran}(\hat{K}) \neq \mathcal{H}$. Concluderemo velocemente affinché questo avvenga è che

$$\dim \text{Im}(\hat{K}) \neq \dim \mathcal{H}.$$

$$\text{Im}(\hat{K}) = \{A \in \mathcal{H} \mid \exists B \in \mathcal{H} : \hat{K}(B) = A\}$$

Siccome siamo su uno spazio vettoriale finito dimensionale, possiamo sfruttare il thm. del rango più nullità

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\text{Ker} \hat{K}) + \dim(\text{Im} \hat{K})$$

ma abbiamo visto che $\dim(\text{Ker} \hat{K}) \geq 1$ poiché non è invertibile

$$\Rightarrow \dim(\text{Im} \hat{K}) = \dim(\mathcal{H}) - \dim(\text{Ker} \hat{K})$$

$$\leq \dim(\mathcal{H}) - 1 \neq \dim(\mathcal{H})$$

$$\Rightarrow \text{Ran} \hat{K} \neq \mathcal{H}$$

iii) Quando Q è hermitiano $\Rightarrow Q = Q^+$

Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ gli autovalori di Q , non degeneri $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$.

Grazie al teorema spettrale sappiamo che Q hermitiano è sempre simile ad una matrice diagonale tramite una matrice unitaria

$$(U U^+ = U^+ U = \mathbb{1})$$

Per cui $Q = U D U^T$ $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

Per cercare gli autovalori di \hat{K} risolviamo il problema

$$\hat{K}(A) = \mu A \quad \text{con } \mu \in \mathbb{C}$$

\Downarrow

$$\mu A = [Q, A] = QA - AQ = U D U^T A - A U D U^T$$

\swarrow Q diagonalizzabile

Moltiplico da sx per U^T e da dx per U

$$\mu \underbrace{U^T A U}_B = D(U^T A U) - (U^T A U) D$$

B

$$\mu B = DB - BD \quad \text{con } B \in \mathcal{H}$$

consideriamo le componenti

$$\mu B_{ij} = \sum_k D_{ik} B_{kj} - \sum_k B_{ik} D_{kj}$$

\uparrow prodotto riga per colonna.

Siccome $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j$, nello summo gli unici summi non nulli sono quelli per cui $k=i$ (nello primo) e $k=j$ (nello secondo)

$$\mu B_{ij} = \lambda_i B_{ij} - \lambda_j B_{ij}$$

$$\Rightarrow [(\lambda_i - \lambda_j) - \mu] B_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Notiamo che, considerando la base canonica di $\mathcal{H} = M_{n \times n}(\mathbb{C})$, questo sarà sol. all'equazione.

Difatti l'eq. ci dice che se $B_{IJ} \neq 0 \Rightarrow B_{ij} = 0 \quad \forall i \neq I, j \neq J$

siccome per h.p. $\lambda_i \neq \lambda_j$

la base canonica $e_{\alpha\beta}$ ha proprio questa forma

$$e_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \alpha$$

\uparrow
 β

Questo mostra che $\mu = \lambda_i - \lambda_j$ e che una base di autovettori per

$$\hat{K} \text{ è dato da } E_{\alpha\beta} = N e_{\alpha\beta} U^T \text{ con autovalori } \lambda_\alpha - \lambda_\beta$$

Lo dim. di $\text{Ker } \hat{K}$ si può trovare banalmente. Siccome $\lambda_i \neq \lambda_j$
 $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, gli unici autovettori nulli di \hat{K} (quelli che spaziano
 $\text{Ker } \hat{K}$) sono $\alpha = \beta$ ($\lambda_\alpha - \lambda_\beta = 0$). Per cui

$$\text{Ker } \hat{K} = \text{Span} \left\{ E_{\alpha\alpha} = U e_{\alpha\alpha} U^T \right\}_{\alpha=1}^n$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } \hat{K} = n.$$

• Esercizio 29/01/2019

Sullo spazio delle linee delle matrici 3×3 $M_3(\mathbb{R})$ munito di prodotto
 interno $(A, B) = \text{Tr}(A^T B)$, si consideri l'op. lineare $\hat{M}: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$
 def. con $\hat{M}A = M \cdot A$ dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- i) Si espliciti l'op. adj \hat{M}^T
- ii) Si determini $\text{Ker } \hat{M}$ e lo suo dim.
- iii) Si determini il proiettore \hat{P} su $\text{Ker } \hat{M}$
- iv) Si calcoli $\hat{P}I$, dove I è id. 3×3 .

i) Per def. di op. adj $(A, \hat{M}B) = (\hat{M}^T A, B)$ e dunque

$$\text{Tr}(A^T \hat{M}B) = \text{Tr}(A^T M B) = \text{Tr}((M^T A)^T B)$$

$$= (M^T A, B) = (\hat{M}^T A, B)$$

Per cui $\hat{M}^T A = M^T A$. ← azione di \hat{M} su $M_3(\mathbb{R})$

$$\text{ii) } \text{Ker } \hat{M} = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) \mid M \cdot A = 0 \right\}$$

Usiamo la seguente notazione

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{array} \right) \equiv (\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \vec{a}_3)$$

\vec{a}_i vettori di \mathbb{R}^3 ~~(\mathbb{R}^3
 ~~dimensione~~
 ~~su \mathbb{R}~~)~~

$$M = \left(\begin{array}{c} \text{--- } M_1^T \text{ ---} \\ \vdots \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c} \vec{m}_1^T \\ \vec{m}_2^T \\ \vec{m}_3^T \end{array} \right)$$

Per trovare una base di $\text{Ker } \hat{M}$ risolviamo le eq

$$(MA)_{ij} = \bar{m}_i^T \bar{v}_j = 0 \quad (1)$$

Notiamo che $\bar{m}_1^T = \bar{m}_2^T + \bar{m}_3^T$. Lo sd. dell'eq (1) è della forma

$$\begin{cases} \bar{m}_2^T \cdot \bar{v}_j = 0 \\ \bar{m}_3^T \cdot \bar{v}_j = 0 \end{cases} \quad \forall j=1,2,3 \Rightarrow \bar{v}_j \perp \text{Span} \{ \bar{m}_2, \bar{m}_3 \}$$

Dato l'omotogeneità dello span si ha che $\bar{v}_j = \alpha_j (\bar{m}_2 \times \bar{m}_3)$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Chiamiamo $\bar{m}_2 \times \bar{m}_3 \equiv \bar{\mu}$ e poniamo $\|\bar{\mu}\| = 1$. Chiosamente \bar{v}_j fornisce una base per $\text{Ker } \hat{M}$ e dunque

$$\text{Ker } \hat{M} = \{ (\alpha_1 \bar{\mu} \mid \alpha_2 \bar{\mu} \mid \alpha_3 \bar{\mu}) \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, i=1,2,3 \}$$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } \hat{M} = 3.$$

iii) L'azione del proiettore \hat{P} su $\text{Ker } \hat{M}$, dato la base

$$u_1 = (\bar{\mu} \mid 0 \mid 0), \quad u_2 = (0 \mid \bar{\mu} \mid 0), \quad u_3 = (0 \mid 0 \mid \bar{\mu})$$

di $\text{Ker } \hat{M}$, è dato da

$$\hat{P}A = \sum_{i=1}^3 (A \mid u_i) u_i$$

Fore esempio proiettare $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$
se non è chiaro la formula

ma notiamo che

$$(A \mid u_1) = \text{Tr}(A^T u_1) = \text{Tr}(A^T (\bar{\mu} \mid 0 \mid 0)) = \text{Tr}(A^T \bar{\mu} \mid 0 \mid 0) = (A^T \bar{\mu})_1$$

$$\leadsto \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13} & 0 & 0 \\ \mu_1 a_{21} + \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 a_{31} + \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13}$$

Per cui si ha

$$\hat{P}A = \sum_{i=1}^3 (A^T \bar{\mu})_i u_i = \sum_{i,j=1}^3 (A^T_{ij} \mu_j) u_i$$

Dunque i suoi elem. di matrice saranno

$$(\hat{P}A)_{rs} = \sum_{i,j=1}^3 (A^T_{ij} \mu_j) (u_i)_{rs} = \sum_{i,j=1}^3 (A^T_{ij} \mu_j) \delta_{is} \mu_r$$

$$= \sum_{j=1}^3 A^T_{sj} \mu_j \mu_r$$

$$= \sum_{j=1}^3 \sigma_{rj} A_{js} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{rj} A^T_{sj} = \sum_{j=1}^3 A^T_{sj} \mu_j \mu_r$$

Queste sono cubiche termine per termine

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{rj} = \mu_r \mu_j}$$

Nota che la norm. di μ è fondamentale
poiché gli autovettori di v proiettore sono
esclusivamente 0 o +1

$$\hat{P} \cdot A = \pi \cdot A \quad \pi_{ij} = \mu_i \mu_j$$

iv) L'azione sull'identità è banale

$$(\hat{P} \mathbb{1})_{ij} = (\pi \mathbb{1})_{ij} = \sum_{k=1}^3 \pi_{ik} \delta_{kj} = \sum_{k=1}^3 \mu_i \mu_k \delta_{kj} = \mu_i \mu_j$$

• Esercizio 19/06/2019

Dimostrare l'affermazione "per una matrice $n \times n$ complessa Θ la norma sup coincide con $\sqrt{\lambda_M}$, dove λ_M è l'autovalore massimo della matrice $\Theta^* \Theta$ ".

In alternativa, verificare che l'affermazione è vero per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

La norma sup è definita come $\sup_{\substack{x \in D(\Theta) \\ x \neq 0}} \frac{\|\Theta x\|}{\|x\|} = \|\Theta\|_{\text{sup}}$

L'op. agisce su uno spazio vettoriale generico, non abbiamo una def. esplicita della sua norma, però sappiamo che

$$1) \|\Theta x\|^2 = (\Theta x, \Theta x) = (x | \Theta^* \Theta x)$$

notiamo che $\Theta^* \Theta$ è hermitiano, infatti $(\Theta^* \Theta)^* = \Theta^* \Theta$ per cui, per il thm spettrale, $\exists D$ diagonale (reale) t.c.

$$\Theta^* \Theta = U^* D U \quad \text{con } U \text{ unitario.}$$

Inoltre $\Theta^* \Theta$ è semidef. positivo, ossia $x^T \Theta^* \Theta x \geq 0$, infatti

$$x^T \Theta^* \Theta x = (x | \Theta^* \Theta x) = (\Theta x | \Theta x) = \|\Theta x\|^2 \geq 0 \quad \text{per def.}$$

↳ gli autovalori di $\Theta^* \Theta$ sono ≥ 0 .

Dunque

$$\|\Theta\|_{\text{sup}} = \sqrt{\frac{(x | U^* D U x)}{(x, x)}} \sup_{x \in \mathbb{C}^n / \{0\}}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ux | D Ux)}{(x | x)}} \sup_{x \in \mathbb{C}^n / \{0\}}$$

il sup va prima!
l'ho dimenticato!

Ma ponendo $y = Ux$, questo è semplicemente un cambio di base (biunivoco e unitario)

$$= \sup_{y \in \mathbb{C}^n / \{0\}} \sqrt{\frac{(y | D y)}{(y | y)}}$$

test. unitario (ovvero invariato lo stesso per def.)

Su \mathbb{C}^n conosciamo il prodotto scalare canonico e D è diagonale

$$\Rightarrow \sqrt{(y|Dy)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2} \leq \sqrt{\lambda_M} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \sqrt{\lambda_M} \sqrt{(y|y)}$$

Dobbiamo massimizzare $\sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}}$ ma più quanto trovato

$$\sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}} \leq \sqrt{\lambda_M}$$

Se scelgo $y = u_{\max}$ ~~l'autovettore~~ l'autovettore associato all'autovalore

λ_M

$$\Rightarrow \sup_{y \in \mathbb{C}^n / \{0\}} \sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}} = \sqrt{\lambda_M} \Rightarrow \|\Theta\|_{\text{sup}} = \sqrt{\lambda_M}$$

- vettori ortogonali $(x|x') = 0$ $(\|x\| = \sqrt{(x|x)})$
- insieme di vettori ortogonali $(u_i|u_j) = \delta_{ij}$
- disuguaglianza di Schwarz $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$
- disuguaglianza di Bessel $\sum_{k=1}^n u_k^2$ set ortogonale
 $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |(u_k|x)|^2$

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

$(x|\cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$
 continuo

esercizio)

spazio normato
 $x \perp y$ nel senso Birkhoff-James

$$\|x\| \leq \|x + ky\| \quad \forall k \in \mathbb{C}$$

spazio con prodotto interno
 $(x|y) = 0$

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

$$\begin{aligned} \|x + ky\|^2 &= (x + ky|x + ky) = (x|x) + k(x|y) + \bar{k}(y|x) + |k|^2(y|y) \\ &= \|x\|^2 + k(x|y) + \bar{k}(x|y) + |k|^2\|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\|x + ky\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$|k|^2\|y\|^2 + k(x|y) + \bar{k}(x|y) \geq 0$$

$$\|y\|^2 \neq 0$$

$$|k|^2 + k \frac{(x|y)}{\|y\|^2} + \bar{k} \frac{(x|y)}{\|y\|^2} \geq 0$$

$$\left| k + \frac{(x|y)}{\|y\|^2} \right|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4} \geq 0$$

$$\frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4} = 0 \Leftrightarrow (x|y) = 0$$



\Rightarrow sequenza di Cauchy |

le somme parziali formano una sequenza di Cauchy in $B(X)$ e le somme parziali della serie di potenze $f(\|\hat{A}\|)$ sono una sequenza di Cauchy in \mathbb{C}

$$f(\|\hat{A}\|) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \|\hat{A}\|^n$$

Completezza di $B(X)$ implica che $f(\hat{A})$ è ben definito

$$f(\hat{A}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_N$$

$$\|f(\hat{A}) - \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_N\| = 0$$

convergenza in norma

condizione sufficiente $\|\hat{A}\| < R$

dove R è il raggio di convergenza della serie $f(z)$ criterio della radice

(1) $\hat{A}, f(\hat{A}) \in B(X)$

$$\hat{A}x = hx \quad \text{con } x \in X$$

$$\text{ovvero } f(\hat{A})x = f(h)x$$

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n$$

$$f(\hat{A})x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\hat{A}^n x}_{\hat{A}^{n-1} \hat{A}x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n x = f(h)x$$

(Spazi di Hilbert) \mathcal{H}
 prodotto interno

$$(1) \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x|x) \geq 0 \quad \text{e} \quad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$$

$$(x|ky) = k(x|y)$$

$$\overline{(x|y)} = (y|x)$$

$$(kx|y) = \overline{k} (x|y)$$