(A1)

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\operatorname{sen} \pi x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{(x^2+1)^2}$$

$$\operatorname{sen}\pi x = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}$$

$$I = \frac{1}{4i}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{i\pi x}}{(x^2+1)^2}}_{J_+} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{-i\pi x}}{(x^2+1)^2}}_{J_-} \Big]$$

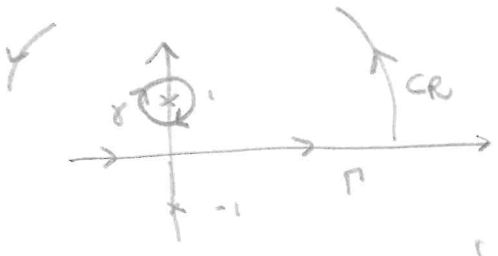
consideriamo J_+ e continuiamo al piano complesso

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z}{(z^2+1)^2} e^{i\pi z}$$

poli $z = \pm i$

poli del 2° ordine

$\operatorname{Im} z > 0$



$$\oint_\Gamma dz \frac{z}{(z^2+1)^2} e^{i\pi z} = -\oint_\gamma dz \frac{z}{(z^2+1)^2} e^{i\pi z} = 2\pi i \operatorname{Res}(i)$$

$$\Gamma = J_+ + \lim_{R\to\infty} C_R$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} dz \frac{z e^{i\pi z}}{(z^2+1)^2} = 0$$

lemma di Jordan

$$\left| \int_{C_R} dz \frac{z e^{i\pi z}}{(z^2+1)^2} \right| \le \frac{R}{(R^2+1)^2} = M_R$$

ma $M_R \to 0$

per cui si ha la convergenza assoluta

(i) $|\int f| \le \int |f|$

(ii) $|\int f| \le L$ ma

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{d}{dz} \frac{z e^{i\pi z}}{(z+i)^2} = \pi \frac{e^{-\pi}}{4}$$

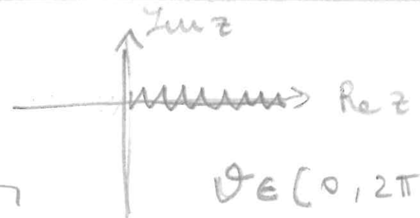
analogamente per J_-:

oppure si può notare

che $J_+(e^{i\pi z}) \xrightarrow[\pi \to -\pi]{} J_-(e^{-i\pi z})$

$$I = \frac{1}{4i}\left(\frac{\pi}{4} e^{-\pi} - \frac{(-\pi) e^{\pi}}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cosh \pi$$

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+2}$$



$\vartheta \in [0, 2\pi]$

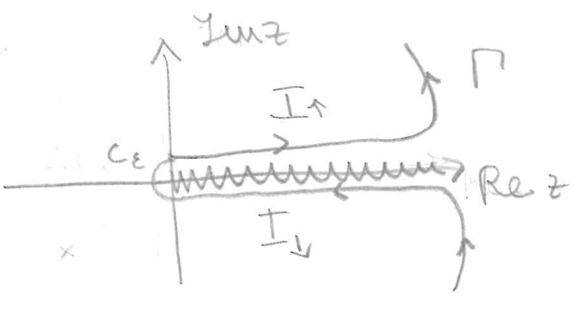
$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z}}{z^2+2z+2}$$

$$z^2+2z+2 = 0$$

poli $z_{01} = -1 \pm i$

$z_{01} = \sqrt{2}\, e^{\pm i \frac{3}{4}\pi}$

poli semplici



$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi + i2\pi}$$

$$I = \int_0^\infty dz\, f(z) \qquad I = I_\uparrow$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I_\uparrow + I_\downarrow + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$I_\uparrow = I$$

$$I_\downarrow = \int_\infty^0 dz \frac{\sqrt[3]{z}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}{z^2+2z+2} =$$

$$= -e^{i\frac{2\pi}{3}} I$$

$$I\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2\pi i \times \Big(\Big($$

$$\left(\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1)\right)\Big)$$

C_R: $\vartheta \in [0, 2\pi] \longrightarrow Re^{i\vartheta}$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} iRe^{i\vartheta} d\vartheta \; \frac{R^{1/3} e^{i\vartheta/3}}{R^2 e^{2i\vartheta} + Re^{i\vartheta} + 2}$$

$dz = iRe^{i\vartheta} d\vartheta$

1) $$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^{4/3}}{|R^2 e^{2i\vartheta} + 2Re^{i\vartheta} + 2|} d\vartheta$$

$$\leq \frac{2\pi}{R^{2/3}}$$

$$0 \leq \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\pi}{R^{2/3}}$$

(per $R \to \infty$ $\int_{C_R} f(z)\,dz$ converge assolutamente a 0

2) Darboux $$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \overbrace{2\pi R}^{L(\gamma)} \underbrace{\sup f(z)}$$

lo ottengo parametrizzando (1)

lemma di stima = Darboux + $+ \lim_{z\to\infty} |z f(z)|$

stessa cosa per C_ε

$\vartheta \in [\pi/2, \frac{3}{2}\pi] \longrightarrow \varepsilon e^{i\vartheta}$

(trasformazione di Mobius)

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \text{ costanti complesse}$$

(det T)

A

T è una trasformazione di Mobius se $ad - bc \neq 0$
(trasformazione frazionaria lineare)

→ la trasformazione di Mobius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ha la trasformazione inversa $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$
la trasformazione inversa è essa stessa una trasformazione di Mobius

$$(T^{-1} \circ T)(z) = z$$
$$T^{-1}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = z$$
$$\frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-a} = z$$

$\mathbb{C}^+ = \{\mathbb{C}, \{\infty\}\}$

→ composizione di due trasformazioni di Mobius è di nuovo una trasformazione di Mobius

→ una trasformazione di $\mathbb{C}^+$ è una trasformazione di Mobius se e solo se è la composizione di un numero pari di inversioni

→ trasformazioni di Mobius mandano cerchi generalizzati in cerchi generalizzati e preservano gli angoli

(cerchio generalizzato
$c|z|^2 + \alpha z + \overline{\alpha z} + d = 0$
$\alpha \in \mathbb{C} \quad c, d \in \mathbb{R}$
$c = 0$ linea
$c \neq 0 \wedge |\alpha|^2 > cd$ cerchio)

(teorema fondamentale delle trasformazioni di Mobius)
c'è un'unica trasformazione di Mobius che manda tre qualsiasi punti distinti di $\mathbb{C}^+$ in tre qualsiasi punti distinti di $\mathbb{C}^+$

---

esempio) $z_1 \longrightarrow 1$
$z_2 \longrightarrow 0$
$z_3 \longrightarrow \infty$

$$T(z) = \left(\frac{z-z_2}{z-z_3}\right)\left(\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right)$$

$T(z_1) = \frac{az_1+b}{cz_1+d} = 1 \qquad az_1 + b = cz_1 + d$

$T(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d} = 0 \qquad az_2 + b = 0$

$T(z_3) = \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \infty \qquad cz_3 + d = 0$

($d = 1 \quad c = -1/z_3$)

la mappa è invariata se i parametri complessi a, b, c, d sono moltiplicati per lo stesso valore non nullo

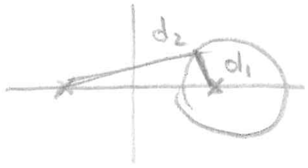
per visualizzare trasformazioni di Mobius è utile focalizzarsi sui punti fissi e, nel caso di due punti fissi, sulle due famiglie di cerchi generalizzati rispetto a questi punti

→ dati due punti p e q in $\mathbb{C}^+$

↓

i) cerchio generalizzato del tipo I di p e q
cerchio generalizzato che passa per p e q

ii) cerchio generalizzato del tipo II di p e q
cerchio generalizzato rispetto al quale p e q sono simmetrici (cerchi di Apollonio)



$$\frac{d_2}{d_1} = \text{cost.}$$

→ qualsiasi cerchio generalizzato del tipo II di p e q interseca qualsiasi cerchio del tipo I di p e q formando un angolo retto ⊛

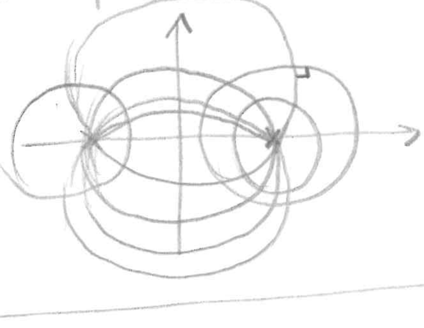
→ poiché le trasformazioni di Mobius preservano cerchi generalizzati e punti di simmetria, le trasformazioni di Mobius preservano cerchi del tipo I e del tipo II

→ C cerchio del tipo I (II) di p e q
allora $T(C)$ è un cerchio del tipo I (II) di $T(p)$ e $T(q)$

consideriamo una trasformazione di Mobius che mappa 0 in p e ∞ in q $(p, q \neq \infty)$

$\Downarrow$

linee attraverso l'origine sono mappate in cerchi tipo I di p e q
e cerchi centrati nell'origine sono mappati in cerchi tipo II di p e q



esempio)
× cerchi del tipo I dei punti 0 e ∞ sono linee attraverso l'origine
× cerchi del tipo II dei punti 0 e ∞ sono cerchi centrati nell'origine

(inversione $0 \longleftrightarrow \infty$)

1) Fissando 0 e ∞

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$ trasformazione di Mobius che fissa 0 ed ∞

$$T(0) = 0 \implies b = 0$$
$$T(\infty) = \infty \implies c = 0$$

$\Longleftarrow$

$$T(z) = \frac{a}{d} z = r e^{i\theta} z$$

(B)

se T fissa 0 e ∞, allora T è una combinazione di una dilatazione (r) ed una rotazione rispetto all'origine (θ)

($r>0$)

una dilatazione di r spingerà punti lungo linee passanti per l'origine

(queste linee sono cerchi del tipo I di 0 ed ∞)

verso ∞ se $r>1$
verso 0 se $0<r<1$

se $r=1$ non c'è dilatazione

una rotazione rispetto a 0 di ϑ spingerà i punti lungo dei cerchi centrati nell'origine

(questi cerchi sono cerchi del tipo II di 0 ed ∞)

$T(z)$ trasformazione di Mobius che fissa due punti finiti p e q ($p, q \neq \infty$)

$S(z) = \dfrac{z-p}{z-q}$ è una trasformazione di Mobius che manda p in 0 e q in ∞

$U = S \circ T \circ S^{-1}$ $\quad U$ è una trasformazione di Mobius

$U(0) = S(p) = 0$
$U(\infty) = S(q) = \infty$

fissa 0 ed ∞

(per cui è una rotazione o una dilatazione o una loro combinazione)

$S \circ T = U \circ S$

la forma normale di una trasformazione di Mobius T che fissa punti distinti p e q ($p, q \neq \infty$)

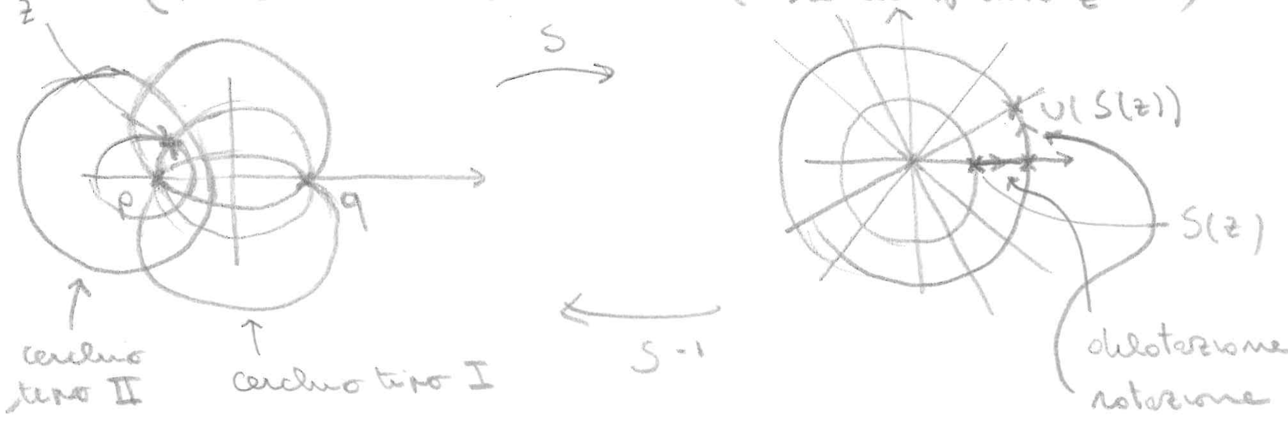
$$\frac{T(z)-p}{T(z)-q} = r e^{i\vartheta} \frac{z-p}{z-q}$$

la forma normale è molto più illuminante della forma standard (a, b, c, d) poiché le costanti hanno ora una semplice interpretazione geometrica:

p e q punti fissi
r è un fattore di dilatazione lungo cerchi del tipo I di p e q
ϑ è un fattore di rotazione lungo cerchi del tipo II di p e q

$T = S^{-1} \circ U \circ S$

T come composizione (osservo l'azione di T su un punto z)



se una trasformazione di Mobius fissa due punti finiti p e q e non è l'identità allora alcuni punti finiti vengono mandati a ∞ inoltre ∞ viene mandato in qualche punto finito

$T(z_\infty) = \infty$

z_∞ è il polo della trasformazione

$T(\infty) = w_\infty$

w_∞ è il polo inverso della trasformazione

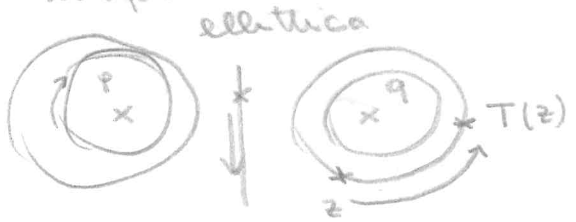
$p + q = z_\infty + w_\infty$

Consideriamo la forma normale $U(z)$

$$U(z) = re^{i\vartheta} z$$

(i) $|re^{i\vartheta}| = 1 \Rightarrow$ non c'è dilatazione ed i punti sono ruotati su cerchi del tipo II di p e q

trasformazione di Mobius ellittica

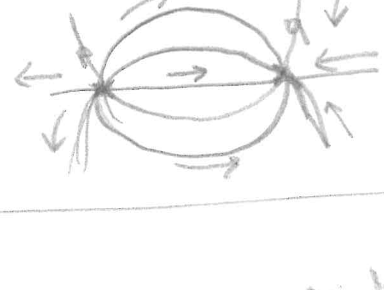


(ii) $\vartheta = 0$ ho solamente una dilatazione

$\Downarrow$

punti si muovono lungo cerchi del tipo I di p e q

trasformazione di Mobius iperbolica



(spinge punti via da un punto fino verso l'altro)

se T è una trasformazione di Mobius che fissa due punti distinti finiti manda z_∞ in ∞ e ∞ in w_∞ allora $T(z) = \dfrac{w_\infty z - pq}{z - z_\infty}$

esempio) $T(z) = \dfrac{(6+3i)z + (2-3i)}{z+3}$

punti fissi $T(z) = z \Rightarrow$ $z = i$
$z = 3+2i$

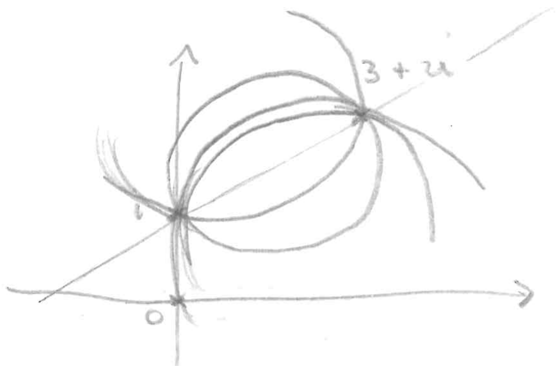
forma normale $\dfrac{T(z)-i}{T(z)-(3+2i)} = h \dfrac{z-i}{z-(3+2i)}$

per trovare h considero un valore conveniente di z

$T(-3) = \infty$

$h = 2$

T è una mappa iperbolica che spinge punti lungo cerchi attraverso i e $3+2i$



$T(0) = \frac{2}{3} - i$
$T(1) = 2$
$T(4i) = 2.16 + 4.12i$

punti si muovono lungo cerchi del tipo I di i e $3+2i$ via da i e verso $3+2i$

---

polo della mappa è $z_\infty = -3$
polo inverso della mappa è $w_\infty = 6+3i$

---

trasformazioni di Mobius che fissano un solo punto

T fissa $p \neq \infty$

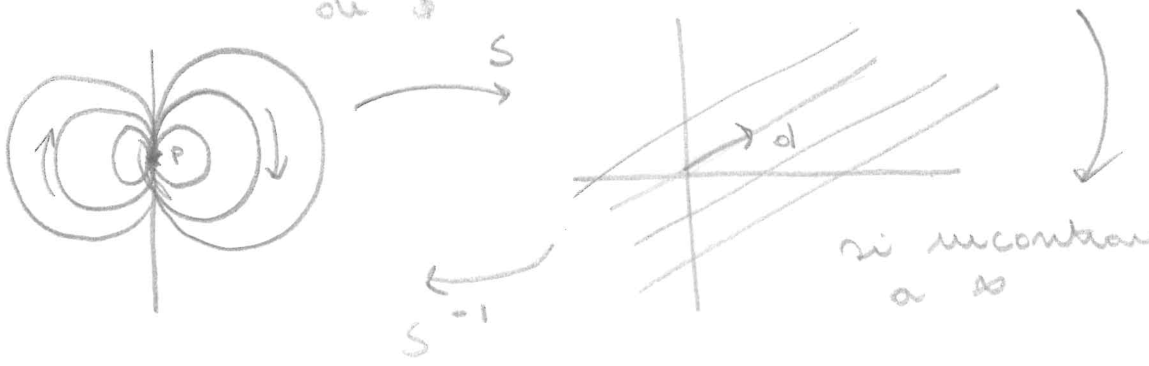
$S(z) = \dfrac{1}{z-p}$ trasf. di Mobius che manda p in ∞

$U = S \circ T \circ S^{-1}$ $U(\infty) = \infty$ U fissa solo ∞
dunque $U(z) = z + d$ $d \in \mathbb{C}$

forma normale

$\dfrac{1}{T(z)-p} = \dfrac{1}{z-p} + d$ (forma normale di una trasformazione di Mobius T che fissa $p \neq \infty$)

$U(z) = z + d$ spinge punti lungo linee parallele tra loro nella direzione di d



mappa parabolica

---

esempio)

$w = \dfrac{z}{z+1}$ punti fissi $z = \dfrac{z}{z+1}$ $z^2 = 0$

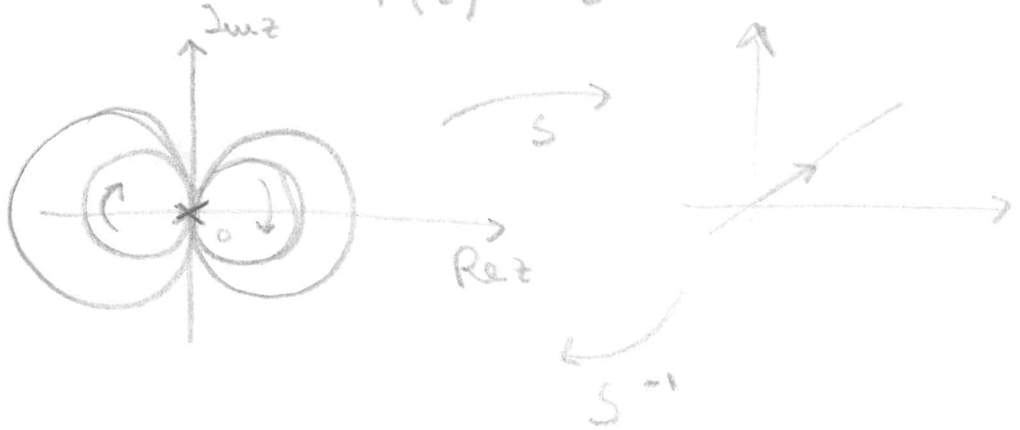
un punto fisso

forma normale $\dfrac{1}{T(z)} = \dfrac{1}{z} + d$

$z_\infty = -1$ $T(z_\infty) = \infty \Rightarrow \dfrac{1}{z_\infty} + d = 0$

$d = -\dfrac{1}{z_\infty} = 1$

$$\frac{1}{T(z)} = \frac{1}{z} + 1$$



retta nel piano complesso

$ax + by + c = 0$

$x = \mathrm{Re}\, z \qquad y = \mathrm{Im}\, z$

$a \,\mathrm{Re}\, z + b\, \mathrm{Im}\, z + c = 0$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$\frac{a}{2}(z + \bar{z}) - \frac{ib}{2}(z - \bar{z}) + c = 0$

$\frac{a - ib}{2} z + \frac{a + ib}{2} \bar{z} + c = 0$

$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$

retta passante per l'origine $c = 0$

cerchio nel piano complesso

$|z - z_0| = R$

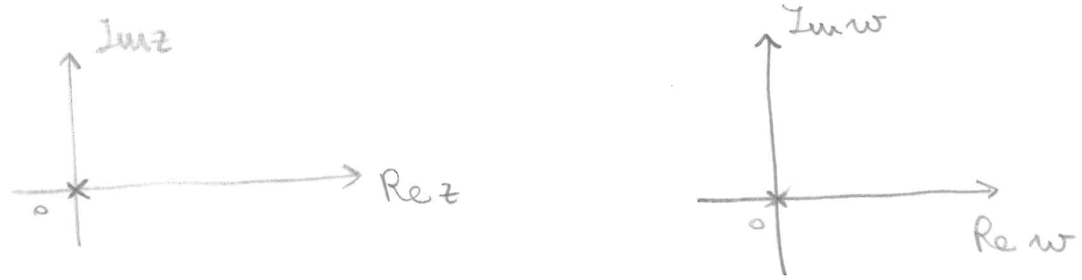
$|z - z_0|^2 = R^2 \qquad (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$

$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + z_0 \bar{z}_0 = R^2$

---

consideriamo $w(z) = \frac{z}{z+1}$ trasf di Mobius

punto fisso $w(z) = z \Rightarrow z = 0$



polo della trasformazione

$w(z_\infty) = \infty \quad \Longrightarrow \quad z_\infty = -1$

polo inverso della trasformazione

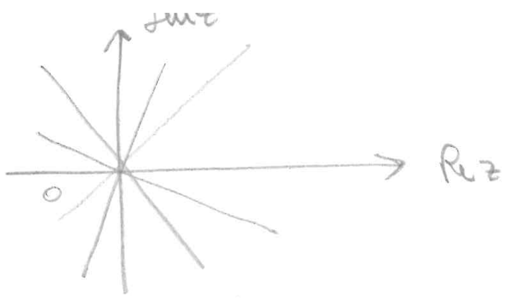
$w(\infty) = w_\infty \quad \Longrightarrow \quad w_\infty = 1$

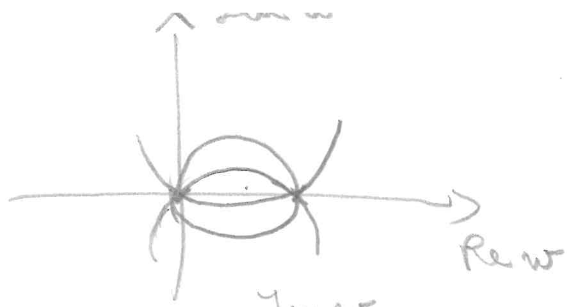
Consideriamo i cerchi del tipo I di 0 ed ∞ (fascio di rette passanti per l'origine)

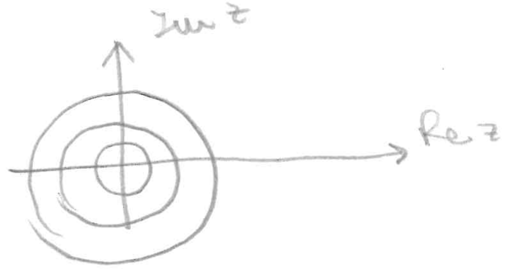
$\rightarrow$ trasf. di Mobius $\Longrightarrow$ mandati in cerchi del tipo I di 0 e w_∞

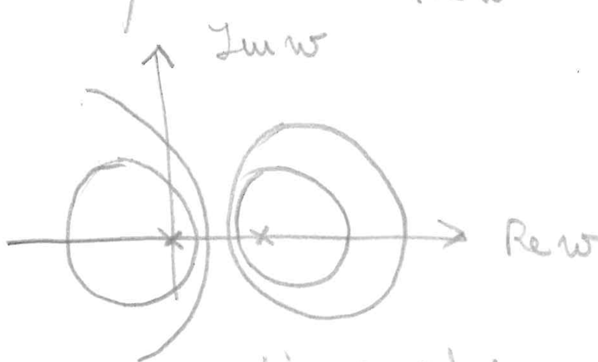
i cerchi del tipo II di 0 ed ∞

$\rightarrow$ trasf. di Mobius $\Rightarrow$ cerchi del tipo II di 0 e w_∞

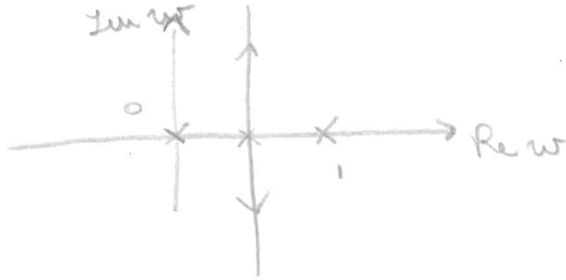








cerchio $|z| = 1$ $\Longrightarrow$ cerchio del tipo II di 0 ed 1
con l'ulteriore vincolo $w(-1) = \infty$



non per niente $|z| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow w = 1/2$

---

ritroviamo i risultati precedenti in modo un poco più formale

fascio di rette passanti per l'origine

$$\beta z + \bar\beta \bar z = 0$$

$$w = \frac{z}{z+1} \iff z = \frac{w}{1-w}$$

$$\beta \frac{w}{1-w} + \bar\beta \frac{\bar w}{1-\bar w} = 0$$

$$\beta w - \beta w \bar w + \bar\beta \bar w - \bar\beta w \bar w = 0$$

ricorda una cerchio

$$|w|^2 (\bar\beta + \beta) - \beta w - \bar\beta \bar w = 0$$

$$|w|^2 - \frac{\beta}{\beta+\bar\beta} w - \frac{\bar\beta}{\beta+\bar\beta} \bar w = 0$$

completamento quadrato

$$(i) \quad \left| w - \frac{\beta}{\beta+\bar\beta} \right|^2 - \left| \frac{\beta}{\beta+\bar\beta} \right|^2 = 0$$

$$w = c + Re^{i\vartheta}$$

$$c = \frac{\beta}{\beta+\bar\beta}$$

$$R = \left| \frac{\beta}{\beta+\bar\beta} \right|$$

passa per 0 ed 1 ?
metto $w = 1$ in (i)
e $w = 0$
ed ottengo una identità

circonferenza centrata nell'origine

$$|z| = R$$

$$\frac{w}{1-w} = z$$

$$|w| = R|1-w| = R|w-1| \quad \text{(def.)}$$

cerchio del II tipo di 0 ed 1

riscriviamolo in modo che sia evidente

$$|w|^2 = R^2 |w-1|^2$$

$$\text{(ii)} \quad |w|^2(1-R^2) + R^2(\bar{w}+w) - R^2 = 0$$

$$|w|^2 + \frac{R^2}{1-R^2}(\bar{w}+w) - \frac{R^2}{1-R^2} = 0$$

completamento quadrato

$$\left|w + \frac{R^2}{1-R^2}\right|^2 \underbrace{- \left|\frac{R^2}{1-R^2}\right|^2 - \frac{R^2}{1-R^2}}$$ $= 0$

$$-\frac{R^4}{(1-R^2)^2} - \frac{R^2}{1-R^2} =$$

$$= \frac{-R^4 - R^2(1-R^2)}{(1-R^2)^2} =$$

$$= -\frac{R^2}{(1-R^2)^2}$$

$$w = c + r e^{i\vartheta}$$

$$c = \frac{-R^2}{1-R^2}$$

$$r = \frac{R}{|1-R^2|}$$

per $R = 1$ si riprende la (ii)

$$\underbrace{\bar{w} + w}_{2\,\mathrm{Re}\, w} - 1 = 0$$

$\mathrm{Re}\, w = 1/2$ asse del segmento $[0,1]$

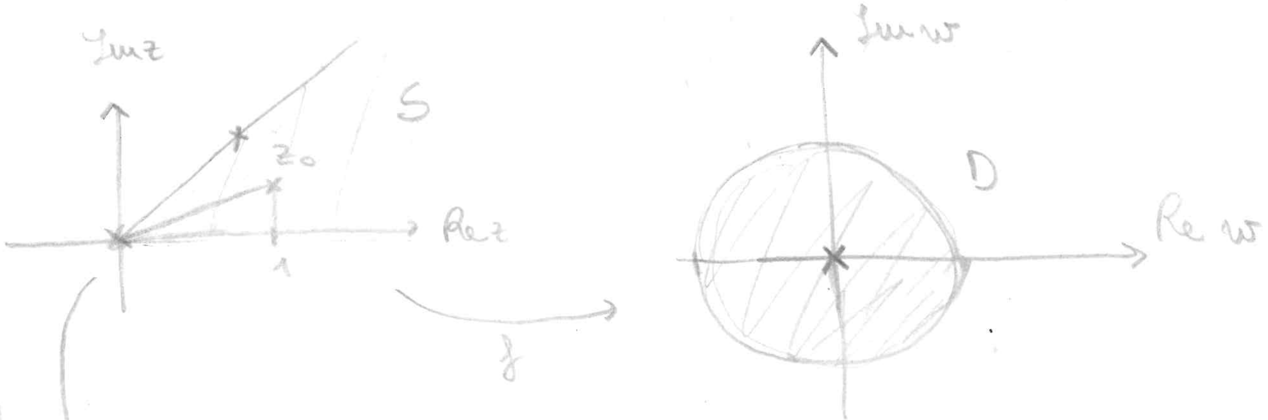
mappa analitica $w = f(z)$ $\quad S = \{ z \mid \pi/3 > \arg(z) > 0 \}$

$$\downarrow$$

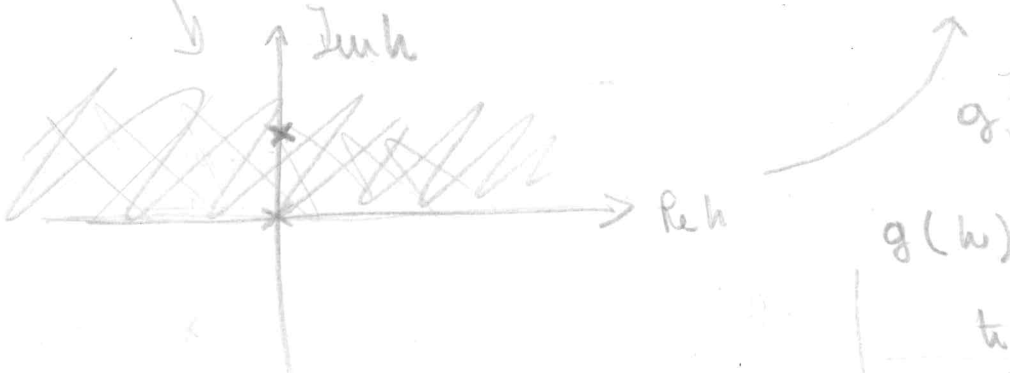
$$D = \{ z \mid |z| < 1 \}$$

e tale che se $z_0 = e^{i\pi/6}$ allora $f(z_0) = 0$

$f'(z_0) > 0$



(f non è una mappa di Mobius
cerchio $\longrightarrow$ cerchio)



$$g(h) = \frac{ah + b}{ch + 1}$$

trasformazione di Mobius

(i) $g(h_0) = 0 \qquad g'(h_0) > 0$

(ii) $h - \bar{h} = 0 \longrightarrow |g(h)| = 1$

$h(z) = z^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$z = \rho e^{i\arg(z)}$

$h(z = \rho e^{i\arg(z)}) = \rho^\alpha e^{i\alpha \arg(z)}$

imponiamo $\alpha \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow \alpha = 3$

$h(z) = z^3$

$z_0 = e^{i\pi/6} \qquad h(z_0) = e^{i\pi/2} = h_0$

(i) $\dfrac{ah_0 + b}{ch_0 + 1} = 0$

$ah_0 + b = 0$

$b = -ah_0$

$g(h) = \dfrac{a(h - h_0)}{ch + 1}$

$g'(h) = \dfrac{a(ch+1) - ac(h-h_0)}{(ch+1)^2}$

$g'(h_0) = \dfrac{a}{ch_0 + 1} > 0$

(ii) $|g(h)| = 1 \qquad |a(h - h_0)| = |ch + 1|$

$|a(h - h_0)|^2 = |ch + 1|^2$

$|a|^2 (h\bar{h} - h\bar{h}_0 - \bar{h}h_0 + \underbrace{h_0\bar{h}_0}_{1}) = |c|^2 h\bar{h} + 1 + ch + \bar{c}\bar{h} \quad h = \bar{h}$

$|a|^2 (h^2 - 2h \cos\frac{\pi}{2} + 1) = |c|^2 h^2 + 1 + h(c + \bar{c})$

$|a|^2 (h^2 + 1) = |c|^2 h^2 + 1 + h(c + \bar{c})$

(i) $g(k_0) = 0 \qquad g'(k_0) > 0$

$\Longrightarrow \quad b = -a k_0 \qquad a[\bar{c}\bar{k}_0 + 1] > 0$

(ii) $k - \bar{k} = 0 \ \wedge \ |g(k)| = 1$

$\Longrightarrow \quad |a|^2 (k^2+1) = |c|^2 k^2 + 1 + k(c+\bar{c})$

trasf. di Mobius $\Rightarrow \ ad - bc \neq 0$

$\Longrightarrow \quad a + a k_0 c = a(k_0 c + 1) \neq 0$

$$(|a|^2 - |c|^2) k^2 - k(c+\bar{c}) - 1 + |a|^2 = 0$$

consideriamo $k = 0 \ \Rightarrow \ |a|^2 = 1$

$$(1 - |c|^2) k^2 - k(c+\bar{c}) = 0$$

per qualsiasi k

$$|c|^2 = 1 \qquad \underbrace{c+\bar{c}}_{\mathrm{Re}\, c} = 0$$

$$c = \pm i$$

$$k_0 c = i(\pm i) = \mp 1$$

$$a(\bar{c}\bar{k}_0 + 1) > 0 \Longleftrightarrow c = -i$$

$$g(k) = \frac{a(k-k_0)}{-ik+1}$$

$$g(\infty) = \frac{a}{-i} \equiv g_\infty$$

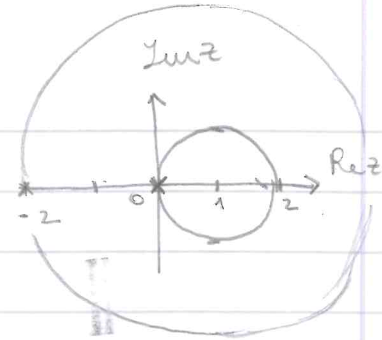
$$g(k) = g_\infty \frac{(k-k_0)}{k+i}$$

$$f(z) = g_\infty \frac{z^3 - i}{z^3 + i} \equiv f_\infty \frac{z^3 - i}{z^3 + i}$$

(Esercizi vari)

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$ per $R = \{ z \mid 1 < |z-1| < 3 \}$

poli semplici in $z = 0 \wedge z = -2$



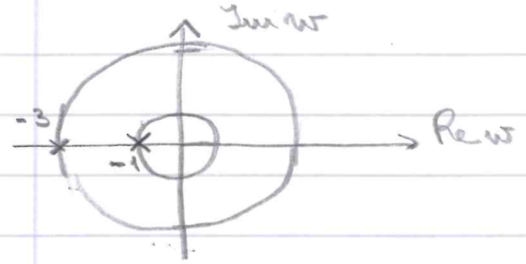
considero $w = z - 1$

$$f(w) = \frac{1}{(w+1)(w+3)} = \frac{A}{w+1} + \frac{B}{w+3} =$$

frazioni parziali

$R = \{ w \mid 1 < |w| < 3 \}$

$$\frac{A(w+3) + B(w+1)}{(w+1)(w+3)}$$



$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases}$ $\quad A = -B$

$-2B = 1 \quad B = -1/2$

$A = 1/2$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{w+1} - \frac{1}{w+3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{w\left(1 - \frac{1}{-w}\right)} - \frac{1}{3\left(1 - \frac{w}{3}\right)} \right] =$$

$\left(\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{3}\right)^n \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{-(n+1)} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} w^n \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} w^{-n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} w^n \right]$$

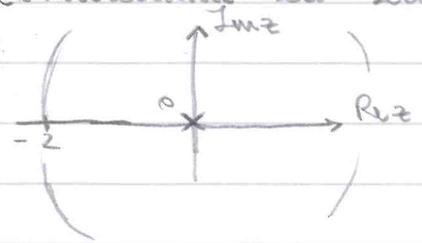
$w = z - 1$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^{-n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (z-1)^n$$

serie di Laurent con centro $z = 1$

---

consideriamo la serie di Laurent di f con centro 0



consideriamo $|z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} z^{n-1} =$$

$$= \frac{(1/2)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-(n+1)} z^{n-1} =$$

$$= \frac{(1/2)}{z} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{-(n+2)} z^n}$$

$r = 0$ raggio di convergenza della parte principale

$C_{-1} = 1/2 \quad z = 0$ polo di ordine 1

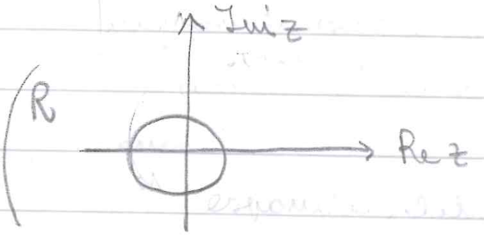
$R = 2$ raggio di convergenza della parte della parte analitica

espansione di Laurent di f nel disco puntato $D(0,2)$

consideriamo $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-(n+2)} = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-2} 2^{m-2} z^{-m}$$



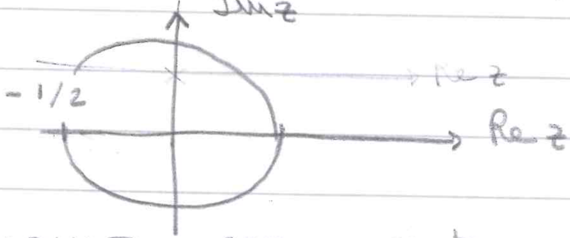
$r = 2$ raggio di convergenza della parte principale

$R = \infty$ raggio di convergenza della parte analitica

consideriamo la trasformazione $T: z \to 1/z$

$$w(z) \equiv T f(z) = f(1/z) = \frac{1}{1/z} \frac{1}{1/z + 2} = z^2 \frac{1}{1+2z}$$

poli $z = \infty$, $z = -1/2$ $\left(\lim_{z \to} f(z) = \infty\right)$



consideriamo come centro $z = 0$

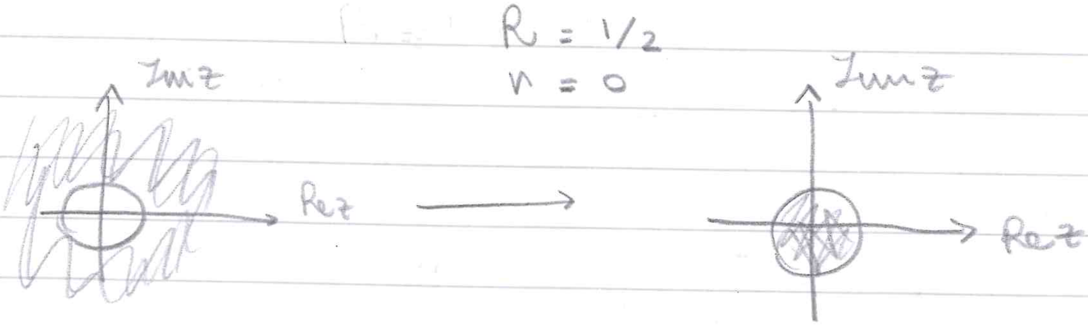
$|z| < 1/2$

$$w(z) = z^2 \frac{1}{1-(-2z)} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-2} 2^{m-2} z^m$$

$R = 1/2$

$r = 0$



ii) immagine del cerchio $|z-1| = 1$ per la mappa $w(z) = 2 + \frac{1}{z}$

$$z(w-2) = 1 \qquad z = \frac{1}{w-2}$$

$$1 = |z-1| = \left| \frac{1}{w-2} - 1 \right| = \left| \frac{1-w+2}{w-2} \right|$$

$$|w-2| = |3-w|$$

cerchio del II tipo passante per 2 e 3

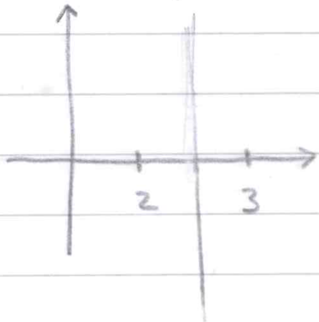
$$|w-2|^2 = |3-w|^2$$

$$\cancel{|w|^2} - 2\bar{w} - 2w + 4 = 9 - 3w - 3\bar{w} + \cancel{|w|^2}$$

$$\bar{w} + w - 5 = 0 \quad \text{retta}$$

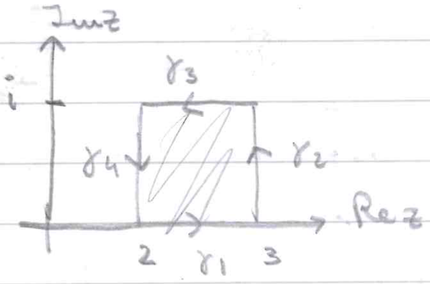
$$\bar{w} + w = 2\,\mathrm{Re}\,w$$

$$\mathrm{Re}\,w = \frac{5}{2}$$



iii) $w = e^z$

fissati i vertici



γ_1: $t \in [2,3] \longrightarrow z = t$

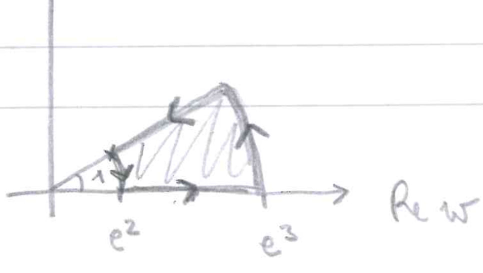
γ_2: $t \in [0,1] \longrightarrow z = 3 + it$

γ_3: $t \in [0,1] \longrightarrow z = i + (3-t)$

γ_4: $t \in [0,1] \longrightarrow z = 2 + i(1-t)$

$$w(\gamma_1(t)) = e^t \qquad w(\gamma_2(t)) = e^3 e^{it}$$

$$w(\gamma_3(t)) = e^{3-t} e^i \qquad w(\gamma_4(t)) = e^2 e^{i(1-t)}$$



iv) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{(2i+1)^{|n|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{(2i+1)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^n} \frac{1}{(1+z)^n}$$ (H)

centro dello sviluppo $z=-1$

cerchiamo l'anello di convergenza

→ Criterio della radice

(i) $\limsup_n \sqrt[n]{|c_n (1+z)^n|} < 1 \Rightarrow |1+z| < |2i+1|$

$z = -1 + Re^{i\vartheta}$

$R = |1+z| < |2i+1|$

$R_M = \sqrt{5}$

(ii) $\limsup_n \sqrt[n]{\left|c_{-n} \frac{1}{(1+z)^n}\right|} < 1$

$\Rightarrow |1+z| > \frac{1}{|2i+1|}$

$r_M = \frac{1}{\sqrt{5}}$