Residui

1) Usando le tecniche di analisi complessa calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2e^x + 3e^{-x}}\, dx$$

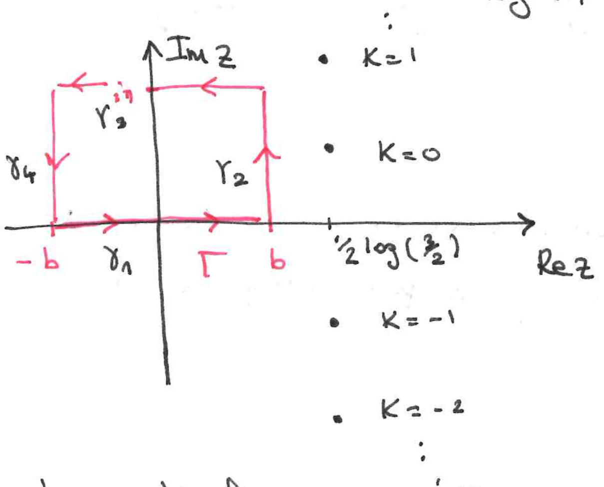
- Consideriamo la funzione $f(z) = \dfrac{z}{2e^z + 3e^{-z}}$. Questa ha singolarità dove si annulla il denominatore

$$2e^z + 3e^{-z} = 0 \implies 2e^z = -3e^{-z}$$

$$\rightarrow e^{2z} = -\frac{3}{2} \rightsquigarrow 2z = \log\left(-\frac{3}{2}\right) = \log\frac{3}{2} + i\pi + 2i\pi k$$

ossia $\quad z_k = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} + i\frac{\pi}{2} + i\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\left(\text{Recall} \quad \log z = \underset{\text{log naturale}}{\log|z|} + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \right)$



Consideriamo il cammino Γ così composto

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

- $\gamma_1 = x \qquad -b < x < b$
- $\gamma_2 = b + iy \qquad 0 < y < \pi$
- $\gamma_3 = x + i\pi \qquad b > x > -b$
- $\gamma_4 = -b + iy \qquad \pi > y > 0$

Questo particolare cammino, nel limite $b \to \infty$, ricostruisce l'integrale cede (γ_1) e racchiude un solo polo z_0.

- $$\lim_{b\to\infty} \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x}{2e^x + 3e^{-x}}\, dx = I$$

- $$\lim_{b\to\infty} \oint_{\gamma_2} f(z)\, dz = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{b+iy}{2e^{b+iy} + 3e^{-b-iy}}\, i\, dy \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$$

$$\bullet \lim_{b\to\infty} \oint_{\gamma_3} f(z)dz = \lim_{b\to+\infty} \int_b^{-b} \frac{x+i\pi}{2e^{x+i\pi}+3e^{-x-i\pi}} dx$$

$e^{i\pi} = -1$

$e^{-i\pi} = -1$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_b^{-b} \frac{x}{2e^x e^{i\pi}+3e^{-x}e^{-i\pi}} dx + \lim_{b\to\infty} \int_b^{-b} \frac{i\pi}{2e^x e^{i\pi}+3e^{-x}e^{-i\pi}}$$

inverto i limiti con i 2 meno

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2e^x+3e^{-x}} + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e^x+3e^{-x}} dx$$

$$= I + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e^x+3e^{-x}} dx$$

$$\bullet \lim_{b\to\infty} \oint_{\gamma_4} f(z)dz = \lim_{b\to\infty} \int_\pi^0 \frac{-b+iy}{2e^{-b+iy}+3e^{b-iy}} i\,dy \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$$

Per il thm dei residui si ha inoltre che

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = 2\pi i \left(\frac{\pi}{4\sqrt{6}} - i\frac{1}{4\sqrt{6}} \log\left(\frac{3}{2}\right) \right)$$

Come abbiamo calcolato questo residuo?

Thm: Sia $f(z) = p(z)/q(z)$ con p, q analitiche in z_0. Se $p(z_0) \neq 0$ e $q(z_0) = 0$ con $q'(z_0) \neq 0$, allora f ha polo semplice in z_0 e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Dim per HP $q(z) = g(z)(z-z_0)$ per qualche $g(z)$ analitica in z_0 e t.c. $g(z_0) \neq 0$.

f ha un polo semplice in z_0 $\Rightarrow$ $f(z) = h(z)/(z-z_0)$ con $h(z)$ analitica in z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Per cui

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = h(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Derivando $q(z) = g(z)(z-z_0)$ $\rightarrow$ $q'(z) = g'(z)(z-z_0) + g(z)$ che in z_0 da $q'(z_0) = g(z_0)$ $\blacksquare$

Per cui

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \left.\frac{z}{-3e^{-z} + 2e^{z}}\right|_{z=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}+i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{-3e^{-\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)}e^{-i\frac{\pi}{2}} + \dots}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{i\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{+3i\sqrt{\frac{2}{3}} + 2i\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2i\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{6}} - i\frac{1}{4\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Dunque

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}$$

Dalla scomposizione sulle varie curve si ha

$$2I + i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2e^{x}+3e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right) + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}$$

Siccome I è reale si ha

$$I = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}\log\left(\frac{3}{2}\right)$$

E come bonus

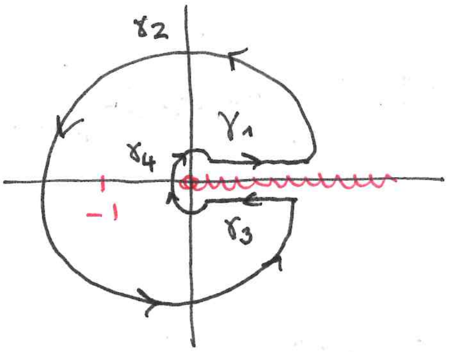
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2e^{x}+3e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

2) Esame 19/06/19

Calcolare con i metodi dell'analisi complessa $I = \int_0^\infty dx\,\frac{x^{2/3}}{(1+x)^2}$

- Si consideri $f(z) = \frac{z^{2/3}}{(1+z)^2}$. Questo ha un polo ~~semplice~~ doppio in $z=-1$ + un branch cut dovuto alla radice.

Scegliamo il ramo dove il branch-cut sia sull'asse reale positivo



$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

Per il thm dei residui

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f,-1)$$

Per calcolare il residuo consideriamo lo sviluppo di Laurent intorno a $z=-1$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}\underbrace{\left[-1+(z+1)\right]^{2/3}}_{g(z)} = \frac{1}{(z+1)^2}\left[(-1)^{2/3} + (z+1)\,g'(z)\Big|_{z=-1} + \dots\right]$$

dove $g'(z=-1) = \frac{2}{3} z^{-1/3}\Big|_{z=-1} = \frac{2}{3}(-1)^{2/3} = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$

Dunque $\mathrm{Res}\,(f,-1) = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$ (coeff. b_{-1} dello sviluppo di f)

D'altro canto, sulle varie curve, nei limiti $r \to 0$, $R \to \infty$

1) $\oint_{\gamma_1} f \to \lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_r^R dx\,\frac{x^{2/3}}{(1+x)^2} = I$

2) $\oint_{\gamma_2} f \to \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{(Re^{i\theta})^{2/3}}{(1+Re^{i\theta})^2} \sim \lim_{R\to\infty}\frac{R^{2/3}}{R^2} = 0$

3) $\oint_{\gamma_3} f \to \lim_{r\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_R^r dx\,\frac{x^{2/3}}{(1+x)^2}\, e^{\frac{4\pi i}{3}} = -e^{\frac{4\pi i}{3}} I$

dalla radice

4) $\oint_{\gamma_4} f \to \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{(re^{i\theta})^{2/3}}{(1+re^{i\theta})^2} \sim r \to 0$

N.B.: l'integrale è fra 0 e π, non 0 e 2π come avevo detto a lezione!

Per cui

$$\left(1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) I = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}(2\pi i)$$

Maneggiando gli esponenziali $e^{\frac{4\pi i}{3}} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} e^{2\pi i} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$

Da cui

$$\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) I = \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) e^{-\frac{i\pi}{3}} I = 2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{-\frac{i\pi}{3}} I$$

Dunque

$$I = \frac{2}{3} (\cancel{2}\pi \cancel{i}) \frac{1}{\cancel{2i} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

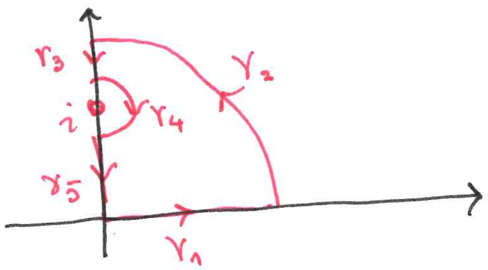
3) Esercizio per casa!

Calcolare, con le tecniche di analisi complessa, l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2x)-1}{x^2+1}\, dx = I$$

utilizzare come contorno di integrazione il seguente

$$\boxed{\text{Risultato: } \frac{\pi}{2}\left(e^{-2}-1\right)}$$



Hint: scrivetemi per mail!