

Def (Residuo): Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfo in U (olomorfo in $U \setminus \{z_0\}$).

Allora in $A(z_0, 0, r)$ vale lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

Il coeff. b_1 è detto residuo di f in z_0 : $\text{Res}(f, z_0) = b_1$.

Thm (dei residui): Sia $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfo. Sia γ un curva chiusa, regolare a tratti (C^1) in $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Siano i punti singolari di f tali che $z_k \in \text{Int}(\gamma) \quad \forall k=1, \dots, n$. Allora

$$\oint_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

Più in generale se γ ha winding number diverso da 1 intorno ai poli

$$\oint_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_k) \text{Res}(f, z_k)$$

Thm (residuo all'infinito): Sia γ curva chiusa semplice regolare a tratti e sia f olomorfo su e all'esterno di γ , allora

$$\oint_{\gamma} f = 2\pi i \text{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Per risolvere gli integrali utilizziamo una serie di lemmi

Lemma (cambio piccolo): 1) Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e sia f olomorfo tale che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\gamma_r} f = 0.$$

2) Sia f con polo semplice in z_0 e γ_r una curva intorno a z_0 . Allora

$$\oint_{\gamma_r} f = (\phi_2 - \phi_1) i \text{Res}(f, z_0)$$

In particolare se $\gamma_r^{\pm}(\theta) = z_0 + re^{\pm i\theta}$ due semicirconf. con $-\pi \leq \theta \leq 0$ allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\gamma_r^{\pm}} f = \pm \pi i \text{Res}(f, z_0)$$

Lemma (cuchio grande): Sio $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e limitato, Sio $f: U \rightarrow \mathbb{C}$
 allora tale che

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in U}} z f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R \cap U} f = 0$$

Dove R è il raggio dello semicirconfrenza che da lo curvo intorno al polo.

Lemma (di Jordan): Sio f analitico in $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0, \text{Im} z \geq 0\}$
 e si consideri il cammino semicircolare $\gamma_R(\theta) = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $R > R_0$
 così che $\gamma_R \subset A$. Se $\exists M_R$ t.c. $|f(z)| \leq M_R \quad \forall z \in \gamma_R$ e
 inoltre $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$, allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz = 0, \quad a > 0.$$

Più genericamente, se γ_R è un ~~raggio~~ arco di circonferenza con
 oscima curvilinea esteso tra θ_1 e θ_2 t.c. $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ e se

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} |f(R e^{i\theta})| = 0$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} = 0.$$

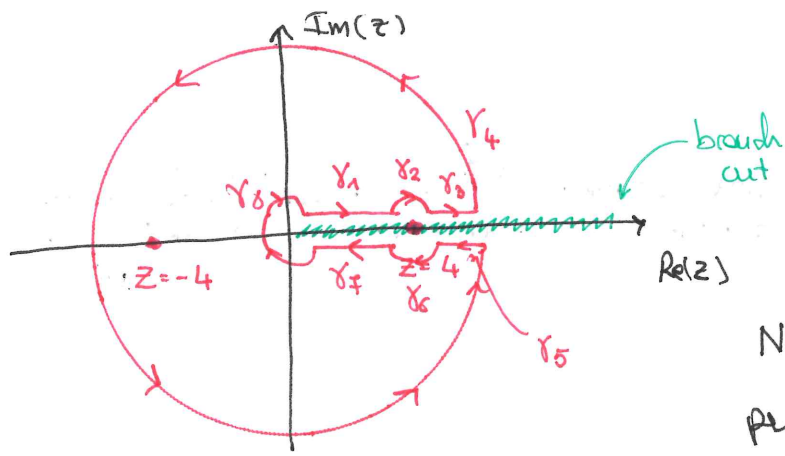
Esercizio 1

Calcolare $\text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 16} dx$ usando tecniche di analisi complessa.

• Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 - 16}$: questo ha un taglio
 dovuto alla radice quadrata + due poli semplici dovuti al denominat.
 $z = \pm 4$

Siccome vogliamo ricostruire quell'integrale reale, scegliamo il ramo
 della radice dove $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Invece del ramo principale $-\pi \leq \varphi \leq \pi$)

Il taglio si trova sull'asse reale positivo che ci permetterà di sfruttare
 l'integrale



Scegliamo questo cammino
(In $z=0$ abbiamo un branch point)

Le curve $\gamma_1+\gamma_3$ e $\gamma_5+\gamma_7$
ricostituiranno l'integrale

N.B. $\gamma_5+\gamma_7$ si trovano sotto il taglio
per cui $\varphi=2\pi$ e lo radice prende

un segno negativo ($z=re^{i\varphi} \rightsquigarrow \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \Rightarrow \varphi=2\pi \rightsquigarrow -\sqrt{r}$).

Vediamo ora i vari pezzi dell'integrale

$$1) \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{\gamma_1+\gamma_3} f(z) dz = \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx$$

$$2) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(f, 4) = -i\pi \lim_{z \rightarrow 4} (z-4) \frac{\sqrt{z}}{(z-4)(z+4)} = -i\pi \frac{1}{4}$$

lemma piccoli archi

$$3) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R} e^{i\theta/2}}{R^2 e^{2i\theta} - 16} i R e^{i\theta} d\theta$$

$\uparrow z = R e^{i\theta}$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta/2} \sqrt{R})}{e^{2i\theta} - (16/R^2)} i e^{i\theta} d\theta \rightarrow 0 \text{ (lemma di Jordan)}$$

sono sotto al taglio

$$4) \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_5+\gamma_7} f(z) dz = \text{PV} \int_{\infty}^0 \left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx \right) = \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx$$

$$5) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_6} f(z) dz = -i\pi \text{Res}(-f, 4) = i\pi \frac{1}{4}$$

$$6) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_8} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{r} e^{i\theta/2}}{r^2 e^{2i\theta} - 16} i r e^{i\theta} d\theta = 0$$

Per cui abbiamo che

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2 \text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx$$

Ma per il thm dei residui

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 4) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -4} (z+4) \frac{\sqrt{z}}{(z-4)(z+4)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

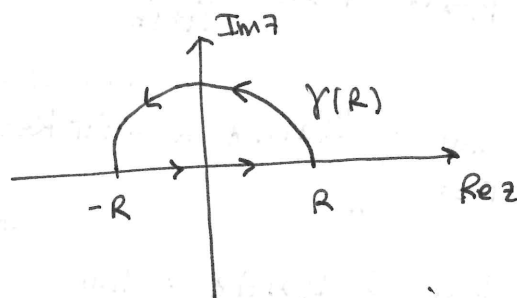
Dunque

$$\operatorname{PV} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-16} dx = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2 (compito 23/09/19 es 1)

Sia $\gamma(R)$ la semicirconferenza $\{z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Si calcoli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma(R)} dz \frac{e^{-i\pi z}}{z^2 - 2z + 2}$$



Si noti che su $\gamma(R)$ per $R \rightarrow \infty$

non possiamo utilizzare il thm di Jordan

Difatti su $\gamma(R)$ abbiamo $\operatorname{Im} z > 0$ per cui, considerando $z = x + iy$ si ha

$$\exp[-i\pi(x+iy)] = \exp[-i\pi x] \exp[\pi y]$$

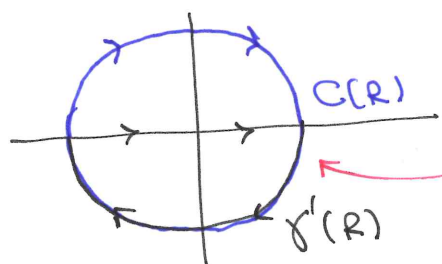
Per $R \rightarrow \infty$ il primo fattore oscilla ma il secondo fattore non soppriime esponenzialmente l'integrale \Rightarrow non va a zero!

Lo curvo se cui è possibile utilizzare il lemma di Jordan è la semicirc. nel LHP

Notiamo che $\gamma(R) = C(R) \setminus \gamma'(R)$ ed in $C(R)$ la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{z^2 - 2z + 2}$$

è analitica \Rightarrow Residui!



$$\oint_{\gamma(R)} e^{-i\pi z} g(z) dz \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

Per cui

$$\oint_{\gamma(R)} f(z) dz = \oint_{C(R)} f(z) dz - \oint_{\gamma'(R)} f(z) dz$$

\rightarrow nel limite $R \rightarrow \infty$ questo fa zero per Jordan

I residui di $f(z)$ vanno calcolati nei poli, dove il denominatore

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \begin{matrix} \rightarrow 1+i \\ \rightarrow 1-i \end{matrix}$$

Abbiamo due poli semplici

$$\bullet \operatorname{Res}(f, 1+i) = \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - (1+i)) \frac{e^{-2\pi z}}{(z - (1+i))(z - (1-i))}$$

$$= \frac{e^{-2\pi(1+i)}}{(1+i - 1+i)} = \frac{e^{-2\pi} e^{-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{-2\pi}}{2i}$$

$$\bullet \operatorname{Res}(f, 1-i) = \lim_{z \rightarrow 1-i} (z - (1-i)) \frac{e^{-2\pi z}}{(z - (1+i))(z - (1-i))}$$

$$= \frac{e^{-2\pi(1-i)}}{(1-i - 1+i)} = -\frac{e^{-2\pi} e^{2\pi i}}{2i} = -\frac{e^{-2\pi}}{2i}$$

Dunque, dato

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0$$

obiamo che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 2\pi i \left[\frac{e^{-2\pi}}{2i} e^{2\pi} - \frac{e^{-2\pi}}{2i} e^{-2\pi} \right] = \pi e^{-2\pi} [e^{2\pi} - e^{-2\pi}]$$

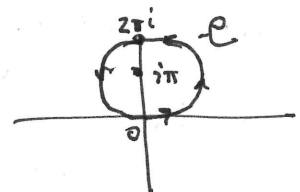
$$= 2\pi e^{-2\pi} \sinh(2\pi)$$

Esercizio 3 (compito 29/01/19 es 4)

Sia C la circonferenza di centro $i\pi$ e raggio π . Calcolare

l'integrale

$$\int_C dz \frac{e^{z/2} + |z|^2}{(z - i\pi)^2}$$



Domanda: Possiamo usare il thm dei residui? NO! la funzione non è olomorfa per via di $|z|^2 = z\bar{z}$ (Recall f olomorfa $\Rightarrow \bar{\partial}f = 0$).

Pero la funzione è additiva

$$f(z) = \frac{e^{z/2}}{(z-i\pi)^2} + \frac{|z|^2}{(z-i\pi)^2} = f_1(z) + f_2(z)$$

Si ha che $f_1(z)$ è olomorfo \Rightarrow residui. Notiamo che $z=i\pi$ è un polo doppio: 2 strade

1) Se f ha polo di ordine k in z_0 , il residuo in z_0 è dato da

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{k-1} \left((z-z_0)^k f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

2) Calcolo sviluppo di Laurent e prendo coeff. di esp. di ordine $(z-z_0)^{-1}$.

Vediamo entrambi. Primo il caso (2)

$$f_1(z) \sim \frac{1}{(z-i\pi)^2} \left[e^{i\pi/2} + \frac{1}{2} e^{i\pi/2} (z-i\pi) + \dots \right]$$

Sviluppo exp in $z=i\pi$

$$= \frac{1}{(z-i\pi)^2} e^{i\pi/2} + \frac{1}{2} e^{i\pi/2} \frac{1}{z-i\pi} + o((z-i\pi)^0)$$

$$= \frac{i}{(z-i\pi)^2} + \frac{i}{2} \frac{1}{z-i\pi} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, i\pi) = \frac{i}{2}$$

Diunque

$$\oint_e f_1(z) dz = 2\pi i \frac{i}{2} = -\pi$$

Metodo (1) ($k=2$)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(z-i\pi)^2 \frac{e^{z/2}}{(z-i\pi)^2} \right] = \frac{1}{2} e^{z/2} \xrightarrow{z=i\pi} \frac{i}{2} \quad \checkmark$$

Per la parte non-olomorfa della funzione dobbiamo fare alcune manipolazioni

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z\bar{z}}{(z-i\pi)^2} dz \xrightarrow{w=z-i\pi} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{(\bar{z}-i\pi)(z+i\pi)}{z^2} dz$$

dove \mathcal{C}' è la circonferenza centrata in 0 di raggio π (lo shift del contorno di integrazione è dovuto al cambio di variabile $z \rightarrow z+i\pi$)

Da qui ora calcoliamo

$$\oint_{\mathcal{C}'} \frac{(\bar{w}-i\pi)(w+i\pi)}{w^2} dw = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2} [w\bar{w} - i\pi w + i\pi\bar{w} + \pi^2]$$

Notiamo che su \mathcal{C}' , $w = \pi e^{i\theta} \Rightarrow \bar{w} = \pi e^{-i\theta} = \frac{\pi^2}{w}$ per cui

$$= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2} \left[\pi^2 - i\pi w + i\frac{\pi^3}{w} + \pi^2 \right]$$

$\propto \frac{1}{w^2}$
integrale
nullo su \mathcal{C}'

$\propto \frac{1}{w^3}$
integrale
nullo su \mathcal{C}'

$\propto \frac{1}{w^2}$
integrale
nullo su \mathcal{C}'

→ Tutti integrali
di Cauchy con
 $\text{Ind}(\gamma, 0) = 1$
dove $\gamma = \mathcal{C}'$.

Rimane soltanto

$$= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2} (-i\pi w) = \oint_{\mathcal{C}'} -\frac{i\pi}{w} dw = 2\pi i (-i\pi) = 2\pi^2$$

Per cui l'integrale darei

$$\boxed{I = -\pi + 2\pi^2}$$