
Lezione 3

Ancora serie di potenze & Laurent

Sia $f(z) = \exp\left(\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$ con $a \in \mathbb{R}$. Trovare la serie di Laurent di $f(z)$ usando i seguenti passaggi:

1) Trovare l'anello di convergenza della serie
2) Mostrare che $C_K = C_{-K}$ per $K \geq 1$
3) Mostrare che $C_K = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{a\cos t} \cos(Kt)\,dt$, $K \geq 0$
4) Mostrare che
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^n}{z^{n+K+1}}\,dz = \begin{cases} \frac{(K+2p)!}{p!\,(K+p)!} & \text{per } n = K+2p,\ p \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
5) Espandere C_K in serie di potenze rispetto ad a.

1) Notiamo che le uniche due divergenze di $f(z)$ sono in $z=0$ e $z=\infty$ per cui l'anello di convergenza è $\mathbb{C}\setminus\{0,\infty\}$

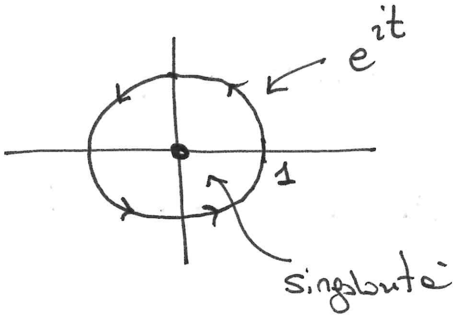
2) Consideriamo $f(z) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K z^K = \exp\left(\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$. Se poniamo $w = \frac{1}{z}$ avremo
$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K \frac{1}{w^K} = \exp\left(\frac{a}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K z^K$$

Evidentemente
$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} C_{-K} w^K = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K z^K \rightsquigarrow C_{-K} = C_K \quad K \geq 1$$

3) Dalla formula integrale di Cauchy abbiamo che

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Supponiamo di sviluppare intorno a $z=0$ e consideriamo la curva di integrazione come il cerchio unitario $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$



$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\exp\left(\frac{a}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right)}{w^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\frac{a}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right)}{e^{i(k+1)t}} (i\cancel{e^{it}})\, dt$$

$$= \frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} e^{a\cos t} e^{-ikt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\cos t} (\cos kt - i \sin kt)\, dt$$

Siccome $c_k = c_{-k}$, l'integrale non può dipendere dal $\sin kt$, ma d'altronde

$$-\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\cos t} \sin(kt)\, dt = \frac{i}{2ak\pi} e^{a\cos(kt)} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{i}{2ak\pi}\left(e^a - e^{a\cos(2k\pi)}\right)$$

ma per $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo $\cos(2k\pi) = 1$ e dunque l'integrale è nullo.

Per cui

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\cos t} \cos kt\, dt$$

4) Per definizione l'integrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^n}{z^{n+k+1}}\, dz$ dà i coefficienti di espansione della funzione

$$g(z) = \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^n$$

che possiamo banalmente espandere con il teorema binomiale

$$\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{2j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} z^{2j-n}$$

Questo ci dice che per ogni $u_K \neq 0$ (dove u_K sono i coeff. di espansione di $g(z)$) si deve avere $n = K+2p$ e $j = K+p$

Questa scelta infatti ci riporta alla somma

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{2j-n} = \sum_{K+p=0}^{K+2p} \binom{K+2p}{K+p} z^{2(K+p)-K-2p}$$

$$= \sum_{K+p=0}^{K+2p} \binom{K+2p}{K+p} z^{K}$$

Dunque i coeff. di espansione sono

$$u_K = \binom{K+2p}{K+p} = \frac{(K+2p)!}{p!\,(K+p)!} \qquad p \geq 0$$

5) Per espandere i coeff. c_K in potenze di a, vediamo che nella loro definizione, la dipendenza da a si trova solamente in $e^{a\cos t}$.

Per cui possiamo pensare di espandere questo nell'ipotesi in cui poi somma ed integrale si possano scambiare.

$$e^{a\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cos^n t$$

Per cui

$$c_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\cos t} \cos Kt \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cos^n t \cos Kt \, dt$$

È evidente che nella regione $|z|>0$ la serie converge uniformemente, infatti

$$\left| \frac{a^n}{n!} \cos^n t \cos Kt \right| \leq \frac{a^n}{n!}$$

$n \in \mathbb{N}$ poiché il coseno è una funzione limitata.

Per cui

$$c_K = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{2\pi} \cos^n t \cos Kt \, dt$$

Dalla dim. in (4) abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^n}{z^{n+K+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{(K+2p)!}{p!(K+p)!} & \text{per } n = K+2p,\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per cui se in questo consideriamo la curva $z(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

abbiamo

$$\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{2it}+1)^n}{e^{i(n+k\cancel{+1})t}}\,\cancel{i}\cancel{e^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{2it}+1)^n e^{-i(n+k)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(e^{2it}+1)\,e^{-it}]^n e^{-ikt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{it}+e^{-it})^n e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2^n\cos^n t\,(\cos kt - i\sin kt)\,dt$$

Nuovamente siccome $\sin kt$ è dispari ed l'intervallo di integrazione è $[0,2\pi]$, quel pezzo dell'integrale è nullo. Dunque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^n t\,\cos kt = \frac{(k+2p)!}{2^n\,p!\,(k+p)!} \qquad \text{per } n-k=2p \text{ e } p\geq 0.$$

mentre è nullo negli altri casi. Dunque

$$c_k = \sum_{\substack{n=0\\ n-k=2p}}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\,\frac{(k+2p)!}{2^n\,p!\,(k+p)!} \qquad p\geq 0.$$