Serie di Taylor & serie di Laurent

I) Cauchy integral formula

Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su U. Sia $z_0 \in U$ e sia $r > 0$ tale che $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$. Si consideri $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 della forma $\gamma(t) = z_0 + r\cos(2\pi t) + i r \sin(2\pi t)$ (~~[illegible]~~). Allora $\forall z \in D(z_0, r)$ si ha che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{z - w}\, dw$$

> N.B. $f(z)$ è determinato solamente dai suoi valori sulla curva γ, molto diverso rispetto alle funzioni reali

II) La formula integrale di Cauchy ci permette di sapere a priori che

per una funzione olomorfa f esistono tutte le derivate!

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow f \in C^\infty(U)$.

Inoltre, se $\overline{D}(P, r) \subseteq U$ e $z \in D(P, r)$, si ha che

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial D(P, |w-z|)} \frac{f(z)}{(w-z)^{k+1}}\, dz$$

III) L'esistenza di tutte le derivate di f olomorfa ci assicura l'esistenza

di uno sviluppo in serie di f nel suo dominio di analiticità.

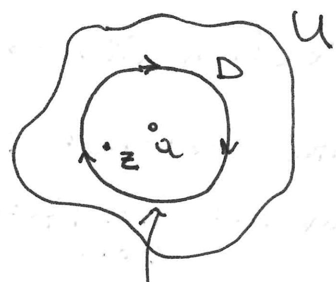
Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Sia $D(a, r) \subseteq U$.

Allora $\forall z \in D(a, r)$, f ha uno sviluppo in serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad c_k = \oint_{\partial D} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \equiv \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$$

Dim: Data la formula integrale di Cauchy, $\forall z \in D(a, r)$ si ha

$$f(z) = \oint_{\partial D} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{w - z}$$



L'integrazione è sul bordo $\Rightarrow w \in \partial D$

Siccome $\underbrace{|w-a|}_{= r} > |z-a|$ avremo che

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}_{<1}}$$

$$= \frac{1}{w-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}$$

$$f(z) = \oint_{\partial D} \frac{dw}{2\pi i} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}$$

La serie geometrica è uniformemente convergente per cui $\int \sum = \sum \int$

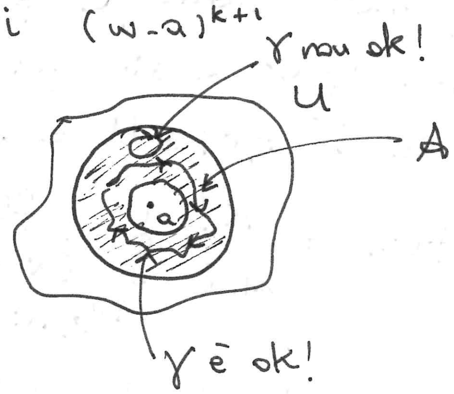
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \oint_{\partial D} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \quad \checkmark$$

IV) Serie di Laurent: sia $f(z)$ analitica in un anello aperto $A(a,r,R) \subseteq U$ dove U dominio di analiticità di f. Allora f ammette un'unico sviluppo in serie di Laurent in $A \subseteq U$ centrato in a

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad c_k = \oint_{\gamma} \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}$$

dove $\gamma \subseteq A$ con omotopia non banale



La serie di Laurent differisce da quella di Taylor nel ~~senso~~ caso in cui f possiede dei poli.

Abbiamo tre casi particolari

i) $c_k = 0 \quad \forall k < 0$

$\rightsquigarrow$ $f(z)$ possiede singolarità rimovibili in $z = a$. In questo caso lo sviluppo in serie di Taylor e quello di Laurent coincidono.

ii) Per qualche $J > 0$, $c_k = 0 \quad \forall k \in (-\infty, -J)$

$\rightsquigarrow$ $f(z)$ possiede un polo semplice

iii) Ne (i) ne (ii) $\rightsquigarrow$ $f(z)$ possiede una singolarità essenziale in $z = a$.

Singolarità rimovibile: $|f(z)| \leq M$ per qualche $r > 0$ tale che $z \in U \cap D(a,r)/\{a\}$

Polo semplice: $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$

Singolarità essenziale: nessuna dei precedenti

La serie di Laurent è necessario nel caso in cui vogliamo sviluppare una funzione olomorfa f su $D(P,r)/\{P\}$ dove in P, f ha una singolarità. Se non per il caso in cui la singolarità è rimovibile, non possiamo aspettarci che esista una serie convergente ad f in un intorno di P poichè questo definirebbe una funzione olomorfa in tutto l'intorno di P compreso P stesso.

Esercizi 2

1) Espandere in serie di Taylor la funzione intorno a $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

La versione corretta di questo esercizio a partire dalla parte su Cayley-Hamilton è su un file separato che trovate nel sito

- Usando Cayley-Hamilton

Qui possiamo fare un giochetto. Notiamo che il raggio di convergenza è dato dalla più piccola radice di $1+z+z^2$ che ci da $r=1$.

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z^k + z^{k+1} + z^{k+2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \underset{\substack{\uparrow \\ k'=k+1\equiv k}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ k'=k+2\equiv k}}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \overset{(1)}{\sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} z^k} + \overset{(2)}{\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} z^k}$$

Per raccogliere le somme porto tutti gli indici a $k=2$

$$= \underbrace{c_0 + c_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k}_{(1)} + \underbrace{c_0 z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-1} z^k}_{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} z^k$$

$$= c_0 + z(c_0+c_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{(c_k + c_{k-1} + c_{k-2})}_{(3)} z^k = 1$$

Affinchè l'uguaglianza funzioni devo avere necessariamente

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_0 + c_1 = 0 \\ c_k + c_{k-1} + c_{k-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \\ c_k + c_{k-1} + c_{k-2} = 0 \end{cases}$$

Per rendere più maneggevole il conto cambio in (3) $k' = k-2$

$$1 = c_0 + z(c_0+c_1) + \sum_{k=0} (c_{k+2} + c_{k+1} + c_k) z^{k+2}$$

La relazione sui c_k ci dà una formula di ricorrenza

$$c_{k+2} = -c_k - c_{k+1} \quad \text{ovvia} \quad c_{k+1} = -c_{k-1} - c_k$$

Questa può essere portata nella seguente forma matriciale

$$\begin{pmatrix} c_{k+1} \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{k-1} \end{pmatrix}$$

Questa forma è suggerita dal fatto che conosco solamente c_0 e c_1

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^K \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la potenza K-esima della matrice usiamo Cayley-Hamilton

<u>Thm</u> (Cayley-Hamilton): Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice $n \times n$ e sia $p_A(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico $\Rightarrow p_A(A) = 0$.

Questo ci permette di trovare delle relazioni di ricorrenza sulle potenze di A. Infatti sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1$$

Errore guardare appunti corretti

Per CH: $p_A(A) = A^2 + A + I = 0 \Rightarrow A^2 = -A - I$ ⊛

Dato ⊛ si ha $A^3 = -A^2 - A \Rightarrow A^2 = -A^3 - A$

trovo che $-A^3 \cancel{-A} = \cancel{-A} - I \rightsquigarrow A^3 = I$ ma dunque $A^K = I \quad K \geq 3$.

Per cui ci basta trovare A^2 che è necessariamente dato da ⊛

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \ldots$$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_2 = -c_1 - c_0 = 0 \\ c_1 = c_1 = -1 \end{matrix}$$

✓

$$A^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_3 = c_0 = 1 \\ c_2 = -c_1 - c_0 = 0 \end{matrix}$$

$$A^{K \geq 3} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_{k+1} \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_{k+1} = c_1 = -1 \\ c_k = c_0 = 1 \end{matrix}$$

e facile notare che

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -1 & k=1 \\ 0 & k=2 \\ (-1)^{k+1} & k \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+z+z^2} = 1 - z + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k \quad \checkmark$$

2) Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2-5z+4}$$

nelle regioni ~~$|z|<1$ e~~ $1<|z|<4$ e $|z|>4$

Innanzitutto proviamo a scomporre in fratti semplici la funzione in modo tale da usare, dove possibile, la serie geometrica. Gli zeri del denominatore sono

$$z^2-5z+4=0 \rightsquigarrow z_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

Per cui

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-4} = \frac{A(z-4)+B(z-1)}{(z-1)(z-4)}$$

$$\Rightarrow z(A+B) - (4A+B) = 1$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Dunque

$$f(z) = \frac{1}{3(z-4)} - \frac{1}{3(z-1)}$$ che è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{1,4\}$

- Nella regione $1<|z|<4$ si ha che

$$\left|\frac{z}{4}\right|<1$$

$$\frac{1}{3(z-4)} = \frac{1}{12(z/4-1)} = -\frac{1}{12}\frac{1}{1-z/4} = -\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^k = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^{k+1}}$$

$$\frac{1}{3(z-1)} = +\frac{1}{3z}\frac{1}{(1-1/z)} = \frac{1}{3z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1$$

Per cui

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}$$

- Nello regione $|z|>4$ si ho

$$\frac{1}{3(z-4)} = \frac{1}{3z}\frac{1}{(1-4/z)} = \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}$$

e l'altro serie rimane uguale, per cui

$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{-n-1}$$

$$= +\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-1)\, z^{-n-1}$$

- Problema 2, compito 23/09/2019

Determinare lo sviluppo in serie di potenze attorno a $z=0$ e gli sviluppi in serie di Laurent con centro $z=0$ per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2-2z-3}$$

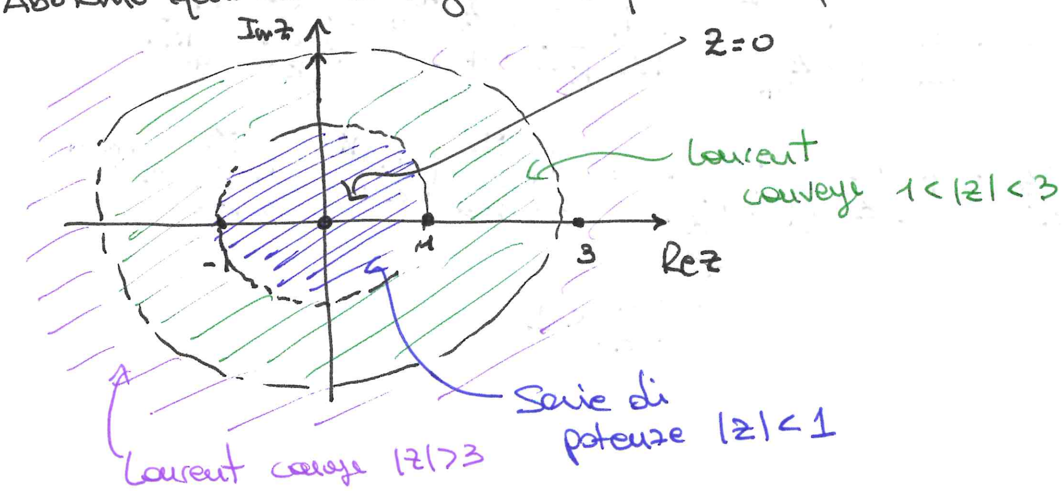
Si specifichino i raggi di convergenza.

- Raggi di convergenza

$$z^2-2z-3=0 \rightsquigarrow z_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Notiamo che in $z=0$, f è regolare per cui possiamo svilupparlo in serie di potenze fino allo più piccolo radice del determinante. Il raggio di convergenza di tali serie è $\rho = |(-1)-0| = 1$.

Abbiamo quindi 3 regioni nel piano complesso



(1) $|z|<1$

Usiamo i fratti semplici

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+B(z-3)}{(z-3)(z+1)}$$

$$\Rightarrow \quad z(A+B) + (A-3B) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A-3B=1 \end{cases} \rightsquigarrow \quad \begin{cases} A=-B \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)}$$

Siccome $|z|<1$ otteniamo la serie geometrica

$$\bullet \quad \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-(z/3)} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} z^n(-1)^n$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\right]z^n .$$

Possiamo anche usare un secondo metodo, senza scomporre in fratti semplici

$$f(z) = \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-(z/3)}\cdot\frac{1}{z+1}$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots\right)\left(1 + (-z) + (-z)^2 + \dots\right)$$

0° ordine

1° ordine

2° ordine

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \left((-z) + \frac{z}{3}\right) + \left((-z)^2 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^2}{9}\right) + \dots\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{k}(-1)^{k-n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k\sum_{n=0}^{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

La seconda serie è una serie geometrica troncata.

Per questo sappiamo che
$$\sum_{n=0}^{k} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$$

Per cui
$$f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k \cdot \frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left((-1)^k + \frac{1}{3^{k+1}}\right)$$ Stesso risultato di prima.

Il prodotto tra due serie così svolto è detto prodotto di Cauchy.
Difatti questo ci dice che
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \qquad c_m = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{m-j}$$

- Sviluppo di Laurent in $1<|z|<3$. Per usare la serie geometrica notiamo che in questa regione $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ e $\left|\frac{z}{3}\right|<1$, quindi svilupperemo le due frazioni di conseguenza

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}$$

- Lo sviluppo in $|z|>3$ si fa allo stesso modo.

• Compito x caso con alcuni consigli. (Compito 19/07/18)

Scrivere la parte principale dello sviluppo di Laurent centrato in $z=-1$ della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(-z)}{(z^2-1)^2}$$

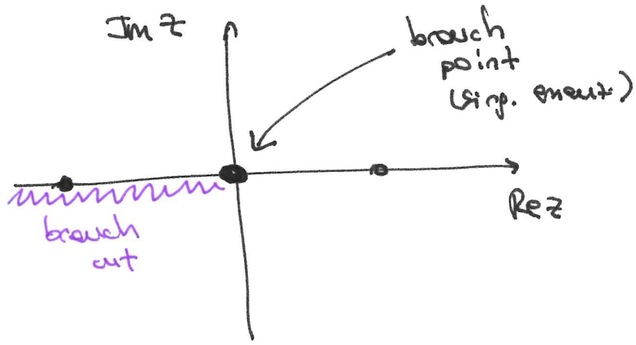
Qual è il disco forato di convergenza?

1) Primo step è sempre quello di capire le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}(-z)}{(z+1)^2(z-1)^2}$$

Se consideriamo il Log principale $\mathrm{Arg}\, z \in [-\pi, \pi)$. Le singolarità sono in $z=1$ e $z=-1$ dal denominatore + $z=0$ & branch cut dal logaritmo

Notare che il branch cut si trova al di sotto della singolarità nella sup. di Riemann definita dal Log.



Notiamo che

$$f(z) \xrightarrow[z\to 1]{} \sim \frac{i\pi}{(z-1)^2}$$

difatti

$$\mathrm{Log}(-z) \xrightarrow[z\to 1]{} \mathrm{Log}\, 1 + i\pi = i\pi$$

$$(z-1)^2(z+1)^2 \xrightarrow[z\to 1]{} \sim 2(z-1)^2$$

Mentre

$$f(z) \xrightarrow[z\to -1]{} \sim + \frac{1}{z+1}$$

E questo deriva dallo sviluppo di

$$\log(1+x) \quad |x|<1$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Il raggio di convergenza dello sviluppo in $z=-1$ è $\rho = 1$

$0 < |z+1| < 1$ ⇝ Il resto viene dallo sviluppo del logaritmo.