Tutorato metodi

· Funzioni olomorfe pt. 2

· La funzione $u(x,y) = e^x(x^2\cos y - y^2\cos y - 2xy\sin y)$ può essere la parte reale di una funzione $f(x+iy)$ olomorfa? Di quale funzione? $v(0,0)=0$

Intuitivamente, la funzione olomorfa che stiamo cercando sarà della forma

$$f(z) = e^z z^2$$

Difatti

$$e^z z^2 = e^{x+iy}(x+iy)^2 = e^x e^{iy}(x^2-y^2+2ixy)$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y)(x^2-y^2+2ixy)$$

$$= e^x\left[\cos y(x^2-y^2) - 2\sin y(xy) + i\sin y(x^2-y^2) + 2i\,xy\cos y\right]$$

$$= e^x(x^2\cos y - y^2\cos y - 2xy\sin y) + i\,e^x(x^2\sin y - y^2\sin y + 2xy\cos y)$$

Ossia

$$\operatorname{Re} f(z) = e^x(x^2\cos y - y^2\cos y - 2xy\sin y)$$

come vogliamo.

Rigorosamente: $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) \Leftrightarrow \nabla^2 u = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\rightsquigarrow \partial_x^2 u(x,y) = e^x(2\cos y) \\ &\rightsquigarrow \partial_y^2 u(x,y) = e^x(-2\cos y)\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \nabla^2 u = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0 \checkmark$$

Quindi $u(x,y)$ è armonica.

La parte immaginaria la troviamo da CR

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$(1)\quad v_y = e^x\left(x^2\cos y - y^2\cos y - 2xy\sin y\right) + e^x\left(2x\cos y - 2y\sin y\right)$$

$$= e^x\left((2x + x^2 - y^2)\cos y - 2(x+1)y\sin y\right)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = e^x(2x + x^2)\int dy\,\cos y - e^x\int dy\,y^2\cos y$$

$$- 2(x+1)e^x\int dy\,y\sin y$$

Notiamo che i tre integrali da calcolare sono in realtà molto simili

Difatti, usando il trick di Feynman, notiamo che

$$\cos y = \cos ky\Big|_{k=1} \qquad -y^2\cos y = \frac{\partial^2}{\partial k^2}\cos(ky)\Big|_{k=1}$$

$$-y\sin y = \frac{\partial}{\partial k}\cos(ky)\Big|_{k=1}$$

Per cui, siccome $\cos y$ è well behaved, posso portare le derivate fuori dagli integrali e calcolare solamente

$$\int dy\,\cos ky = \frac{1}{k}\sin(ky)$$

$$\leadsto \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{k}\sin(ky)\right)\Big|_{k=1} = \frac{1}{k^2}\left(ky\cos(ky) - \sin(ky)\right)\Big|_{k=1} = y\cos y - \sin y$$

$$\leadsto \frac{\partial^2}{\partial k^2}\left(\frac{1}{k}\sin(ky)\right)\Big|_{k=1} = -\frac{1}{k^3}\left((k^2y^2-2)\sin ky + 2ky\cos ky\right)\Big|_{k=1}$$

$$= -2y\cos y - (y^2-2)\sin y$$

Per cui

$$v(x,y) = e^x\left(2xy\cos y + (x^2-y^2)\sin y\right) + A(x)$$

Dalla seconda eq di CR si trova un risultato analogo

$$v(x,y) = e^x\left(2xy\cos y + (x^2-y^2)\sin y\right) + B(y)$$

e dalle condizioni al contorno $A(x) = B(y) = 0$

• Trovare $f(z)$ olomorfa tale che $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ e $f(1) = 1$.

Usiamo un altro metodo. ~~Ricordiamo che f(z) olomorfa implica~~
consideriamo quanto segue

$$\partial_z f(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right) f(x,y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)\left(u(x,y) + i v(x,y)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - i u_y + i v_x + v_y\right)$$

Usando CR: $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$ otteniamo

$$\partial_z f(z) = \partial_x u(x,y) - i\,\partial_y u(x,y).$$

Per cui, trovando le derivate di $u(x,y)$

$$\partial_x u(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Per simmetria

$$\partial_y u(x,y) = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Dunque

$$f'(z) = \frac{y^2-x^2-2xy - i(x^2-y^2-2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

Notiamo che

$$-x^2+y^2-2xy-ix^2+iy^2+2ixy =$$

$$(-x^2+2ixy+y^2) + i(-x^2+2ixy+y^2)$$

$$= (1+i)(-x^2+2ixy+y^2) = -(1+i)(x-iy)^2$$

ed il denominatore

$$(x^2+y^2) = (x+iy)(x-iy)$$

Dunque

$$f'(z) = \frac{-(1+i)\cancel{(x-iy)^2}}{(x+iy)^2\cancel{(x-iy)^2}} = -\frac{1+i}{z^2} \Rightarrow f(z) = -\int dz\,\frac{1+i}{z^2} = \frac{1+i}{z} + c$$

$$f(1) = 1+i+c = 1 \Rightarrow c = \cancel{1}-i$$