• Si consideri la funzione olomorfa $f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$.
Sulla retta reale $y=0$ si ha $u(x,0) = \sin^2 x$, $v(x,0) = 0$.
Calcolare $f(z)$.

Questo è un problema alle derivate parziali. Per risolverlo consideriamo che la funzione $f(z)$ è olomorfa, ossia

$$\partial_{\bar z} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(x,y) + i\,\partial_y f(x,y) = 0.$$

Difatti

$$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar z = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar z}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \partial/\partial z + \partial/\partial \bar z \\ \partial/\partial y = \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar z}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial \bar z} = i\dfrac{\partial}{\partial z} - i\dfrac{\partial}{\partial \bar z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} \partial/\partial z \\ \partial/\partial \bar z \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial z \\ \partial/\partial \bar z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$$

Dunque $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{i}{2}\partial_y$

(Questo comportamento, col segno opposto nelle derivate, è generale. Ha a che fare con l'interpretazione geometrica delle derivate come elementi dello spazio tangente di una varietà differenziabile, in questo caso varietà analitica).

Per cui dobbiamo risolvere la seguente PDE

$$\begin{cases} \partial_x f + i\,\partial_y f = 0 \\ f(x,0) = \sin^2 x \end{cases}$$

la condizione al contorno viene da

$$f(x,0) = u(x,0) + i v(x,0) = \sin^2 x$$

Per risolvere l'eq. facciamo il seguente Ansatz

$$f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(y)\, e^{inx}$$

(se f è olomorfa, la possiamo sviluppare in serie)

Inserendo nell' equazione

$$\partial_x \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(y) e^{inx} \right) + i \partial_y \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(y) e^{inx} \right) = 0$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(in A_n(y) e^{inx} + i A_n'(y) e^{inx} \right) = 0$$

Questo deve essere valido $\forall n$ dunque

$$\cancel{i} n A_n(y) \cancel{e^{inx}} + \cancel{i} A_n'(y) \cancel{e^{inx}} = 0$$

$$\boxed{A_n'(y) = -n A_n(y)}$$

Questa è una ODE per $A_n(y)$ che si risolve banalmente

$$\Downarrow$$

$$A_n(y) = c_n e^{-ny}$$

Difatti

$$A_n'(y) = c_n (-n) e^{-ny} = -n \left(c_n e^{-ny} \right) = -n A_n(y) \quad \checkmark$$

Dunque

$$f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-ny} e^{inx}$$

(Notare che $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-ny} e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in(x+iy)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inz}$

$\Rightarrow$ serie di Laurent).

A questo punto troviamo i c_n dalle condizioni iniziali. Difatti

$$f(x,0) = \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{2ix} - \frac{1}{4} e^{-2ix}$$

$$f(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} 1/2 & n=0 \\ -1/4 & n=\pm 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2y} e^{2ix} - \frac{1}{4} e^{2y} e^{-2ix}$$

$$= \sin^2(x+iy)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \sin^2 z}$$