serie di Laurent

(A)

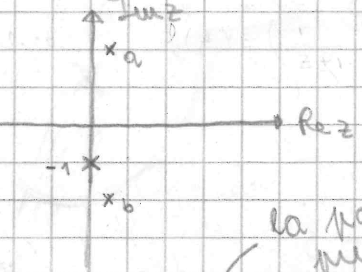
1) trovare i coefficienti della serie di Laurent, ed il raggio del disco punturato

$$\frac{1}{z^3+z+2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z+1)^n$$

$$z^3+z+2 = (z+1)(z^2-z+2) = (z+1)(z-a)(z-b)$$

$$\longrightarrow a = \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{7}) \qquad b = \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{7})$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-a)(z-b)}$$



$$f(z) = \frac{g(z)}{(z+1)}$$

$g(z)$ non ha polo in $z=-1$ per cui considerando il disco punturato in $z=-1$ di raggio (r) tale da escludere eventuali poli di $g(z)$ $(z=a, z=b)$, quella che si è scritta non è altro che l'espansione di Laurent di $f(z)$ nel disco punturato $(D(-1,r))$ stesso

la parte principale

$z=-1$ è una singolarità isolata, infatti nel disco punturato $D(-1,r)$ $f(z)$ è analitica

(ovviamente è necessario espandere $g(z)$ in $z=-1$, ma non essendo $z=-1$ un polo per $g(z)$, o meglio un punto singolare per $g(z)$, l'espansione avrà solamente una parte analitica (l'espansione in $z=-1$))

$g(z)$ ha delle singolarità anche essa, differenti da $z=-1$, per cui mi aspetto che il raggio r del disco punturato minimo sia limitato da queste singolarità di $g(z)$)

$|z+1| = r$ cerchio centrato in $z=-1$

$$|b+1| = \left|\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{7}}{2} + 1\right| = \left|\tfrac{3}{2} - i\tfrac{\sqrt{7}}{2}\right| = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{9+7}\right) = 2$$

$$r = 2$$

il raggio inferiore di convergenza della parte principale dell'espansione è 0 avendo una singolarità isolata

cerchiamo l'espansione in $z=-1$ di $g(z)$

$$g(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \left(\frac{1}{z+1-(a+1)} - \frac{1}{z+1-(b+1)}\right)\left(\frac{1}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{7}} \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k \left(\frac{1}{(b+1)^{k+1}} - \frac{1}{(a+1)^{k+1}}\right) =$$

$$\left(\frac{(-1)}{(a+1)} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{z+1}{a+1}\right)\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{7}} \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k+1}e^{-i\vartheta(k+1)}} - \frac{1}{2^{k+1}e^{i\vartheta(k+1)}}\right)}_{\frac{1}{2^{k+1}}\underbrace{\left(e^{i\vartheta(k+1)} - e^{-i\vartheta(k+1)}\right)}_{2i\,\mathrm{sen}(\vartheta(k+1))}} = \frac{1}{2i\sqrt{7}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^k 2i\,\mathrm{sen}(\vartheta(k+1))$$

$a = -1 + 2e^{i\vartheta}$

$b = -1 + 2e^{-i\vartheta}$

$a = (-1+2\cos\vartheta) + 2i\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

$-1 + 2\cos\vartheta = \frac{1}{2} \longrightarrow \cos\vartheta = \frac{3}{4}$

$2\,\mathrm{sen}\,\vartheta = \sqrt{7}/2 \longrightarrow \mathrm{sen}\,\vartheta = \sqrt{7}/4$

$$\frac{1}{z^3+z+2} = \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{2^k}\,\sin[(k+1)\vartheta]$$

Operatori lineari e Spazi di Hilbert infinito-dimensionali

2) Nello spazio $\ell^2(\mathbb{C})$ delle sequenze $\bar u = \{u_1, u_2, \dots\}$ studiare l'operatore $(\hat T \bar u)_k = u_k + u_{k+1}$, il suo spettro, l'inverso e l'aggiunto

$\ell^2(\mathbb{C})$ è l'insieme delle sequenze complesse $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tali che $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$ ($\|\bar a\|_{\ell_2}<\infty$)
→ è uno spazio di Hilbert (ovvero è completo) separabile (ovvero ha un sottoinsieme denso numerabile)

l'operatore è lineare ed agisce come la matrice infinita bidiagonale

$$\hat T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\|\hat T\bar u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|u_k+u_{k+1}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(2|u_k|^2 + 2|u_{k+1}|^2 - |u_k-u_{k+1}|^2\right) \le 4\|\bar u\|^2$$

(proprietà del parallelogramma $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$)

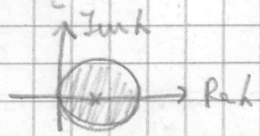
l'operatore è limitato $\|\hat T\| \le 2$

l'equazione agli autovalori $\hat T\bar u = \lambda\bar u$ è $u_k+u_{k+1} = \lambda u_k$
ovvero $u_{k+1} = (\lambda-1)u_k$

se $\lambda\neq 1$ la soluzione è $u_k = (\lambda-1)^{k-1}u_1$, il vettore appartiene a $\ell^2(\mathbb{C})$ se $\|\bar u\|<\infty$ ovvero $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(|\lambda-1|^{k-1}|u_1|)^2<\infty$
in altri termini $\|\bar u\|^2 = |u_1|^2\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda-1|^{2(k-1)}<\infty \Leftrightarrow |\lambda-1|<1$

se $\lambda=1$ $u_{k+1}=0$ ovvero l'autovettore associato è $\{1,0,0,\dots\}$

$\sigma_p(\hat T) = \{|\lambda-1|<1\}$ (spettro di $\hat T$)



↓

il bordo del disco $\lambda = 1+e^{i\vartheta}$ corrisponde alle sequenze $u_k = e^{i(k-1)\vartheta}u_1$ che non sono quadrato sommabili (o meglio le sequenze $u_k = e^{ik\vartheta}$)
mostriamo che $|\lambda-1| = 1$ è lo spettro continuo di $\hat T$

consideriamo la sequenza $\bar u_\varepsilon = \{e^{ik\vartheta-k\varepsilon}\}_{k=1}^{\infty}$

$$\|\hat T\bar u_\varepsilon - (1+e^{i\vartheta})\bar u_\varepsilon\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{i(k+1)(\vartheta-i\varepsilon)} + e^{ik(\vartheta-i\varepsilon)} - (1+e^{i\vartheta})e^{ik(\vartheta-i\varepsilon)}\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-(k+1)\varepsilon}-e^{-k\varepsilon}\right)^2 = (1-e^{-\varepsilon})^2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2k\varepsilon} =$$

$$\left(|e^{i(k+1)(\vartheta-i\varepsilon)} - e^{i(k+1)\vartheta-k\varepsilon}|^2 = |e^{i(k+1)\vartheta}|^2|e^{-(k+1)\varepsilon}-e^{-k\varepsilon}|^2\right)$$

$$= (1-e^{-\varepsilon})^2\|\bar u_\varepsilon\|^2$$

dunque ($\varepsilon\to 0$) $\bar u_\varepsilon$ è una sequenza di autovettori approssimati (senza limite in ℓ^2) per il numero $1+e^{i\vartheta}\in\sigma_c(\hat T)$

un numero $|\lambda-1|>1$ non può essere nello spettro poiché la sequenza corrispondente $\{u_k\}$ è esponenzialmente divergente

la sequenza $\bar v_\varepsilon = \{e^{-k\varepsilon}\}$ corrisponde al valore spettrale $\lambda=2$ con modulo massimo

$$\|\hat T\bar v_\varepsilon\|^2 = (1+e^{-\varepsilon})^2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2k\varepsilon} = (1+e^{-\varepsilon})^2\|\bar v_\varepsilon\|^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|e^{-k\varepsilon}+e^{-(k+1)\varepsilon}|^2\right)$$

$$\sup_{\varepsilon}\frac{\|\hat T\bar v_\varepsilon\|}{\|\bar v_\varepsilon\|} = 2$$

(ovvero $\|\hat T\|\to 2$ quando $\varepsilon\to 0$
però $\|\hat T\|\neq 2$ poiché per $\varepsilon=0$ $\bar v_{\varepsilon=0}$
non è quadrato sommabile)

C

l'aggiunto di $\hat{T}$ è definito da $(\hat{T}^+ \bar{v}|\bar{u}) = (\bar{v}|\hat{T}\bar{u})$

$$(\hat{T}^+ \bar{v}|\bar{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{T}^+ \bar{v})_k^* u_k = (\bar{v}|\hat{T}\bar{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* (u_k + u_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* u_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} v_k^* u_{k+1}}_{k+1 \to k} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* u_k + \sum_{k=2}^{\infty} v_{k-1}^* u_k =$$

$$= v_1^* u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (v_k + v_{k-1})^* u_k$$

dunque

$$k=1 \quad (\hat{T}^+ \bar{v})_k = v_1 \qquad\qquad \hat{T}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$k>1 \quad (\hat{T}^+ \bar{v})_k = v_k + v_{k-1}$$

lo spettro di $\hat{T}^+$ è il complesso coniugato di $\sigma(\hat{T})$ e coincide con esso

poiché 0 non è un autovalore
(è un autovalore generalizzato)
l'operatore $\hat{T}$ è invertibile

$$(\hat{T}\hat{T}^{-1}\bar{u})_k = (\hat{T}^{-1}\bar{u})_{k+1} + (\hat{T}^{-1}\bar{u})_k = u_k \quad k = 1, 2, \dots$$

la soluzione è l'operatore
non limitato

$$(\hat{T}^{-1}\bar{u})_1 = 0$$

$$(\hat{T}^{-1}\bar{u})_k = \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k+1-l} u_l$$

$A_k = (\hat{T}^{-1}\bar{u})_k$

$A_1 + A_0 = 0 \longrightarrow A_1 = 0$

$A_2 + A_1 = u_1 \longrightarrow A_2 = u_1$

$A_3 + A_2 = u_2 \longrightarrow A_3 = u_2 - u_1$

$A_4 + A_3 = u_3 \longrightarrow A_4 = u_3 - u_2 + u_1$

Spettro discreto

$z \in \sigma_p(\hat{A})$ se z è un autovalore:
$\exists\, u \in \mathcal{H} \mid \hat{A} u = z u$
$(\ker(\hat{A} - z) \neq \{0\}$ ovvero $(z - \hat{A})^{-1}$ non esiste$)$

Spettro continuo

$z \in \sigma_c(\hat{A})$ se z è un autovalore generalizzato:
$z \notin \sigma_p(\hat{A})$, $\exists \{u_n\} \subset \mathcal{H}$, $\|u_n\| = 1$
tale che $\lim_{n\to\infty} \|\hat{A} u_n - z u_n\| = 0$

↳ per un operatore limitato $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c$ è lo spettro dell'operatore

Nota: nello spettro continuo $\{u_n\}$ non è una sequenza di Cauchy

la convergenza $u_n \to u$ e la continuità (limitatezza) di $\hat{A}$ implicherebbero che u sia un autovettore e $z \in \sigma_p(\hat{A})$

l'operatore $\hat{T}\hat{T}^+$ è autoaggiunto $((\hat{T}\hat{T}^+)^+ = \hat{T}\hat{T}^+)$

$$(\hat{T}\hat{T}^+\bar{u})_k = (\hat{T}^+\bar{u})_k + (\hat{T}^+\bar{u})_{k+1} = \begin{cases} 2u_1 + u_2 & k=1 \\ u_{k-1} + 2u_k + u_{k+1} & k>1 \end{cases}$$

$$\hat{T}\hat{T}^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

matrice tridiagonale

l'equazione agli autovalori $u_{k-1} + 2u_k + u_{k+1} = \lambda u_k$
ha soluzione $u_k = A e^{ikp} + B e^{-ikp}$ con $\lambda = 2\cos p$
con condizione al bordo $2u_1 + u_2 = \lambda u_1$ ne fissano
A e B
gli autovettori non appartengono ad ℓ^2
lo spettro è continuo $\sigma_c = [-2, 2]$

3) Consideriamo l'operatore lineare su $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$

$$(\hat{T} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k} \cos(kx) \qquad f_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \,\mathrm{sen}\, kx\, f(x)$$

mostrare che $\hat{T}$ è limitato e valutarne la norma, mostrare che $\hat{T} f$ è una funzione continua, per quali valori a e b $(\hat{T} f)(x) = a + bx^3 + |x|$ ammette una soluzione f

(le funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$ e $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{sen}\, kx$ sono ortonormali e sono un set completo per $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$) (teorema di Parseval)

$$\|\hat{T} f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|^2}{k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \le \|f\|^2$$

dunque $\hat{T}$ è limitato con norma ≤ 1

considerando la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{sen}\, x$, $f_k = \delta_{k1}$, il sup nella definizione della norma di $\hat{T}$ satura e si ottiene $\|\hat{T}\| = 1$

→ per una qualsiasi $f \in \mathbb{L}^2$ consideriamo la sequenza di somme parziali

$$F_N = \hat{T}_N f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{N} \frac{f_k}{k} \cos(kx)$$

le funzioni F_N sono continue; mostriamo che la sequenza è uniformemente convergente

$$|F_{N+m}(x) - F_N(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=N+1}^{N+m} \frac{f_k}{k} \cos kx \right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=N+1}^{N+m} \frac{|f_k|}{k}$$

dove $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k|}{k} = (\{|f_k|\} \mid \{\frac{1}{k}\})$

con $\{|f_k|\} \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\{1/k\} \in \ell^2(\mathbb{R})$

$|(\{|f_k|\} \mid \{1/k\})| \le \|\{|f_k|\}\|\, \|\{1/k\}\|$ disuguaglianza di Schwarz

ovvero la sequenza converge in $\ell^2(\mathbb{R})$ al prodotto di due sequenze in $\ell^2(\mathbb{R})$

Proposizione) una condizione necessaria e sufficiente per una serie perché converga è che la sequenza delle somme parziali sia una sequenza di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \mid \forall N > N_\varepsilon\ \forall m > 0\ \left| \sum_{k=N+1}^{N+m} a_k \right| < \varepsilon$$

allora $\left| \sum_{k=N+1}^{N+m} \frac{|f_k|}{k} \right| = \sum_{k=N+1}^{N+m} \frac{|f_k|}{k} < \varepsilon$

$$|F_{N+m}(x) - F_N(x)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon$$

dunque la sequenza è di Cauchy e perciò convergente (uniformemente) (non c'è dipendenza da x)

una sequenza uniformemente convergente di funzioni
continue converge ad una funzione continua

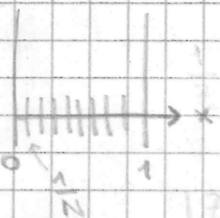
$(\hat{T}f)(x) = a + bx^3 + |x|$ ma $(\hat{T}f)(x)$ è pari per cui $b=0$

inoltre $\hat{T}f$ è ortogonale alla funzione costante per cui $a=0$

$\hat{T}f(x) = |x|$ ammette una soluzione

4) Considerare il funzionale $\langle F_N | \varphi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{k}{N}\right)$ $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
è una distribuzione temperata? converge la sequenza $\{F_N\}$ ad una distribuzione? valutare $\{\mathcal{F} F_N\}$. converge la sequenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per $N \to \infty$?

F_N è una distribuzione temperata poiché è una combinazione lineare finita di funzioni delta



$\Delta x = \frac{1}{N}$ $\quad I = \sum_i f(x_i) \Delta x_i$

dove $I \simeq \int_0^1 f(x)\, dx$
da mostrare
(per qualsiasi funzione test)

lo spazio dei funzionali continui su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\left| \int_0^1 dx\, \varphi(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi\left(\frac{k}{N}\right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k/N}^{k/N + 1/N} dx \left[\varphi(x) - \varphi\left(\frac{k}{N}\right) \right] \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k/N}^{k/N + 1/N} dx \left| x - \frac{k}{N} \right| \leq$$

$\left(\left| \varphi(x) - \varphi\left(\frac{k}{N}\right) \right| \leq \sup |\varphi'(x)| \left| x - \frac{k}{N} \right| \right.$
avendo $|\varphi(b) - \varphi(a)| = |\varphi'(\xi)|(b-a)$
$\xi \in (a,b)$
$\left. \text{disuguaglianza di Lagrange} \right)$

$$\leq \|\varphi\|_{0,1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{1/N} dx\, x = \|\varphi\|_{0,1} \frac{N}{2N^2} = \|\varphi\|_{0,1} \frac{1}{2N}$$

$\left(x - \frac{k}{N} \longrightarrow x \right)$

dunque $\{F_N\}$ converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alla funzione $\chi_{[0,1]}$

serie geometrica

$$\mathcal{F} F_N = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{(\mathcal{F} \delta_{m/N})}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{e^{-ikm/N}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik} - 1}{e^{ik/N} - 1}$$

$\left(\mathcal{F}\delta_a(k) = \frac{e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}} \right.$

$\left. \langle \mathcal{F} \delta_{m/N} | \varphi \rangle = \langle \delta_{m/N} | \mathcal{F} \varphi \rangle \right)$

$$\mathcal{F} F_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik} - 1}{ik}$$ ma questa è $\mathcal{F} \chi_{[0,1]}$

1) la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{1}{e^{2z} - 3e^{z} + 2}$
ha una singolarità isolata in $z = 0$ si determini la parte principale del relativo sviluppo di Laurent ed il raggio di convergenza della parte a potenze positive

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$f(z) = \frac{1}{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ \right)^2 - 3\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ \right) + 2} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2z + 2z^2 + O(z^3) - 3 - 3z - \frac{3}{2}z^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}z^2 - z + O(z^3)} = \frac{2}{z\left(z - 2 + \frac{1}{2}O(z^2)\right)} =$$

$$= \frac{2}{z(-2)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2} + O(z^2)\right)} = -\frac{1}{z}\left[1 + \frac{z}{2} + O(z^2)\right]$$

la parte principale del relativo sviluppo di Laurent è $P f(z) = -\dfrac{1}{z}$

consideriamo $w = e^z$ $\quad g(w) = f(z(w)) = \dfrac{1}{w^2 - 3w + 2}$

$z = 0 \qquad w = 1 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{poli di } g(w) \\ w = 1, 2\end{array}\right)$

$D(w = 1, r = 1)$ raggio di convergenza di $g(w)$
(disco puntuato in cui lo sviluppo di Laurent di g converge)

oppure posso osservare che $g(w)$ diverge anche per $w = 2$ ovvero $z = \ln 2$ e che la trasformazione non introduce ulteriori divergenze per cui

$R = \ln 2$

$D(w = 1, r = 1) : |w - 1| = 1$

$w = e^z$

$|w - 1|^2 = 1 \qquad |w|^2 - w - \overline{w} = 0$

$e^{z + \overline{z}} = e^z + e^{\overline{z}}$

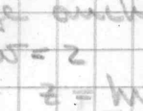
$z = x + iy$

$e^{2x} = e^x\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) = 2e^x \cos y$

$\dfrac{e^x}{2} = \cos y$

$y = 2\pi n + \cos^{-1}\left(\dfrac{e^x}{2}\right)$

il raggio di convergenza è dato dalla tangenza tra il minimo disco e la curva γ

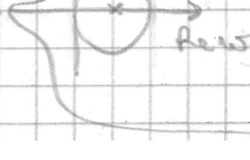


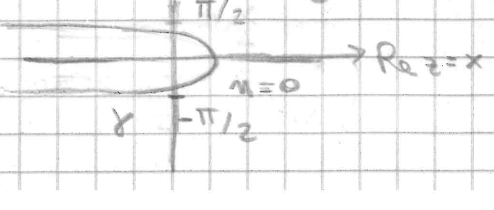
ovvero il punto con distanza minima da $z = 0$

$d(x y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\cos^{-1}\frac{e^x}{2}\right)^2}$

$\dfrac{d}{dx} d(x, y(x)) = \dfrac{2x + 2\left[\cos^{-1}\frac{e^x}{2}\right] \cdot \frac{1}{-\sin\frac{e^x}{2}} \frac{e^x}{2}}{2\, d(x, y(x))}$

$0 = 2x\sqrt{1 - \left(\frac{e^x}{2}\right)^2} - \frac{e^x}{2}\cos^{-1}\left(\frac{e^x}{2}\right)$





2) Si consideri la matrice $e^M = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

calcolare la traccia di M e risolvere l'eq. matriciale nell'incognita M

$\vartheta \in (0, 2\pi)$

$A \equiv e^M \ (\equiv e^{iN}$ dove $M \equiv iN)$

$\det A = \det e^M = e^{\mathrm{tr} M}$ lemma di Jacobi

$\det A = -2 = e^{+i\pi} e^{\ln 2} = e^{\mathrm{tr} M} \Rightarrow \mathrm{tr} M = \ln 2 + i\pi$

$(Ax|y) = (A_{ij}x_j)^* y_i = x_j^* (A^*)^t_{ji} y_i = (x|A^+ y)$

$A^+ = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = A \Rightarrow A$ è autoaggiunta (autovalori reali)

$(A^+ = e^{M^+} = A = e^M \qquad M^+ = M + i2\pi n)$

teorema spettrale $\quad p_A = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -(1+\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0\end{cases}$$

$$\sqrt{2} \quad \begin{cases} -(1+\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\sqrt{2})x_2 = 0\end{cases}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1+\sqrt{2}$

$$-\sqrt{2} \quad \begin{cases} (-1+\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (1+\sqrt{2})x_2 = 0\end{cases}$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1-\sqrt{2}$

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad D^+ = \begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2}\\ 1 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$DAD^+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = D e^M D^+ = e^{DMD^+}$$

dove $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \sigma_z$

$$\sigma_z = e^{DMD^+ - \frac{1}{2}\ln 2}$$

$$i\sigma_z = e^{DMD^+ - \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi/2}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z} = e^{DMD^+ - \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi/2}$$

$$DMD^+ = \frac{i\pi}{2}(\sigma_z + 3) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$M = D^+\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{i\pi}{2}(\sigma_z + 3)\right]D$$

$$M = \left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{i\pi}{2}\underbrace{D^+\sigma_z D}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{2}\\ 1 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1 & -1-\sqrt{2}\\ 1 & -1+\sqrt{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1-(1+\sqrt{2})^2 & 2\\ 2 & 1-(1-\sqrt{2})^2\end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{Tr}(D^+\sigma_z D) = -4$$

$$\mathrm{tr} M = \ln 2 + i3\pi - i\pi 2 = \ln 2 + i\pi$$

matrice complesse unitarie

$U^+U = I$

$\det U = 1$

$SU(2)$

$U(\vec{n}\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\vec{n}\vec{\sigma} \times \mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}$

$U(\vec{n}\varphi) = e^{-\frac{i}{2}\varphi\vec{n}\vec{\sigma}}$

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$\Downarrow$

algebra:

esponenziazione (spazio lineare)

$\Updownarrow$

coordinate normali in spazio curvo

$\Rightarrow$ metrica piatta

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

3) in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ considerare la famiglia di operatori lineari $\hat{P}_h$ (17)
$h \in \mathbb{R}/\{0\}$

$$(\hat{P}_h f)(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$$

$\hat{P}_h$ è limitato? invertibile? $\hat{P}_h^+$? $(\hat{P}_h^2)^+$?

introduciamo l'operatore traslazione $(\hat{U}_h f)(x) = f(x-h)$
nota che $\hat{U}_h^+ = \hat{U}_{-h}$ (operatore unitario

$\|\hat{U}x\| = \|x\|$ isometria $\forall x \in \mathcal{H}$
$\operatorname{Ran}\hat{U} = \mathcal{H} \Rightarrow (\hat{U}^+$ ben definito$)$
$\left(\begin{array}{l}\ker\hat{U} = \{0\} \\ \|\hat{U}\| = 1\end{array}\right) \Rightarrow \exists\ \hat{U}^{-1}$ dove $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$

$(x|y) = (\hat{U}x|\hat{U}y) = (\hat{U}^+\hat{U}x|y)$
$\forall x, y \in \mathcal{H}$
$\Rightarrow x = \hat{U}^+\hat{U}x$
$\Rightarrow \hat{U}^+\hat{U} = I$
ovvero $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$

$\|\hat{U}\| = \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|\hat{U}x\|}{\|x\|} = 1$

$\ker\hat{U} = \{x \in \mathcal{H} \mid \hat{U}x = 0\}$
$\operatorname{Ran}\hat{U} = \{y \mid \hat{U}x = y$ con $x \in \mathcal{H}\}$

$\left.\begin{array}{l}\ker\hat{U} = \{0\} \Leftrightarrow \text{funzione iniettiva} \Leftrightarrow \text{invertibile} \\ \operatorname{Ran}\hat{U} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \text{funzione suriettiva}\end{array}\right\}$ isomorfismo

$$\hat{P}_h = \frac{1}{2h}\left(\hat{U}_{-h} - \hat{U}_h\right)$$

$$\|\hat{P}_h\| \leq \frac{1}{2|h|}\left(\|\hat{U}_{-h}\| + \|\hat{U}_h\|\right) = \frac{1}{|h|}$$

$\hat{P}_h$ limitato

$\ker\hat{P}_h = \{f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \mid \hat{P}_h f(x) = 0\}$

$f(x+h) = f(x-h)$
funzioni periodiche o costanti
che non appartengono a $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

(es $\cos x$ $\|\cos x\|^2 \to \infty$)

$\hat{U}_h$ (teorema di Stone)
se $\hat{U}_h$ un gruppo unitario fortemente continuo su uno spazio di Hilbert allora esiste un operatore autoaggiunto $\hat{P}$ tale che

$$\hat{U}_h = e^{ih\hat{P}}$$

$\hat{P}$ generatore del gruppo

$$\hat{U}_h^+ = (e^{ih\hat{P}})^+ = e^{-ih\hat{P}} = \hat{U}_{-h}$$

$\hat{U}_s\hat{U}_t = \hat{U}_{s+t}$
$\lim_{s\to 0}\|U_s x - x\| = 0 \ \forall x \in \mathcal{H}$
(connesso all'identità)

$$\hat{P}_h^+ = \frac{1}{2h}\left(\hat{U}_h - \hat{U}_{-h}\right) = \hat{P}_{-h}$$

$$\hat{P}_h^2 = \frac{1}{4h^2}\left(\hat{U}_{-2h} - 2 + \hat{U}_{2h}\right)$$

$U_h U_h = U_h^+ U_h = I$

$$\hat{P}_h\hat{P}_h = \frac{1}{4h^2}\left(\underbrace{U_{-h} - U_h)(U_{-h}}_{U_{-2h}} - U_h\right)$$

$(\hat{P}_h^2)^+ = \hat{P}_h^2$ operatore autoaggiunto