Teoria delle Distribuzioni

Motivazioni: Per lo studio delle PDE, il concetto di derivabilità spesso è sufficiente. Le soluzioni in generale sono funzioni $C^k(\Omega)$ per un qualche spazio Ω.

Questo però non è sempre vero. Per esempio nello studio dei problemi agli autovalori di secondo ordine in un intervallo $[a,b]$ con condizioni al bordo per operatori su spazi di Hilbert.

$\Rightarrow$ si può introdurre il concetto di assoluta continuità dove

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} v(x)\,dx + c$$

v localmente integrabile su I
↳ integrabile su sottoinsieme compatto di I.

Qui $v(x)$ può essere visto come la derivata di $u \rightsquigarrow v = \frac{d}{dx}u$.

Per PDE in $\mathbb{R}^n$ spesso questo non è sufficiente ancora

$\Rightarrow$ si introduce il concetto di derivata debole: u, v loc. integrabili in $\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto, diciamo che $v = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ in senso debole quando

$$-\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\,dx = \int_\Omega v\varphi\,dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \equiv S(\Omega)$$

spazio di Schwartz

funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω

[N.B. supporto di f è il complementare del più grande insieme aperto dove f è zero]

La funzione φ è detta funzione test ed appartiene allo spazio di Schwartz i.e.

$$S(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_{n,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n (\partial_x^m \varphi)| < \infty \}$$

Nella def. di derivata debole il RHS è un funzionale lineare su $S(\Omega)$

$$\Lambda_v : \varphi \longmapsto \Lambda_v(\varphi) = \int_\Omega v\varphi\,dx$$

L'idea della teoria delle distribuzioni è di permettere l'esistenza di funzionali generici. Difatti, quando Λ è un qualsiasi funzionale su $S(\Omega)$ tale che

$$-\int_\Omega u\,\partial_j\varphi\,dx = \Lambda(\varphi) \qquad \forall \varphi \in S(\Omega)$$

Qui non abbiamo richiesto l'esistenza di v.

diremo che $\partial_j u = \Lambda$ nel senso delle distribuzioni

Def: lo spazio dei funzionali lineari continui su $S(\Omega)$ è lo spazio $S'(\Omega)$ delle <u>distribuzioni temperate</u>

Una condizione sufficiente per la continuità è la limitatezza rispetto alla seminorma

$$|f\varphi| \leq C_f \|\varphi\|_{n,m} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}) \quad \text{con} \quad f \in S'(\mathbb{R}).$$

<u>Esempio</u>: se $f \in L^1(\Omega)$ allora la mappa

$$\Lambda_f : \varphi \longmapsto \int dx\, f\varphi \quad \text{è una distribuzione}$$

In questo caso Λ_f può essere identificato con f per ragioni che non vedremo.

Una distribuzione di questo tipo è detta regolare.

- <u>Esercizio 04/07/2018</u>

Posto: $\langle f|\varphi\rangle = \int_{-2}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{1+|x|}$, mostrare che f è una distribuzione temperata e determinare la distribuzione f'.

Qui utilizziamo la notazione bra ket per l'azione di una distribuzione temperata su una funzione di prova (cfr. ~~Teorema~~ Thm rappresentazione di Riesz)

i) Per essere una distr. f deve essere funzionale lineare e continuo

i.i) Lineare è ovvio per la linearità dell'integrale

i.ii) Per la continuità chiediamo la limitatezza

$$|\langle f|\varphi\rangle| \leq C_f \|\varphi\|_{m,n}$$

$$|\langle f|\varphi\rangle| = \left| \int_{-2}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)}{1+|x|} \right| \leq \int_{-2}^{\infty} dx \frac{|\varphi|}{1+|x|} \leq \int_{-2}^{\infty} dx\, |\varphi|$$

poiché $1+|x| \geq 1 \;\; \forall x \;\rightsquigarrow\; \frac{1}{1+|x|} \leq 1$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi|\,dx \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\pi}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi|\,dx = \|\varphi\|_{L^1}$$

$$\leq \pi \left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0} \right) \Rightarrow f \text{ è continua.}$$

ii) $\langle f' | \varphi \rangle = - \langle f | \varphi' \rangle$ per integrazione per parti e termini di bordo nulli

$$= - \int_{-2}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{1+|x|}\,dx$$

$$= - \left[\int_{-2}^{0} \frac{\varphi'(x)}{1-x} + \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{1+x} \right]$$

$$= - \frac{\varphi(x)}{1-x}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{\varphi(x)}{1+x}\Bigg|_{0}^{\infty} + \int_{-2}^{0} \frac{\varphi(x)}{(1-x)^2} - \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\varphi(-2)}{3} - \int_{-2}^{\infty} dx \frac{\varphi(x)\,\mathrm{sgn}(x)}{(1+|x|)^2}$$

Il primo pezzo è una delta di Dirac $\langle \frac{1}{3}\delta_{-2} | \varphi \rangle$. Per cui

$$\langle f' | \varphi \rangle = \int_{-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\delta(x+2) - \frac{\mathrm{sgn}(x)}{(1+|x|)^2} \right) \varphi(x)\,dx$$

- Esercizio 20/06/2018

1) Posto $\langle \Theta_a | \varphi \rangle = \int_a^{\infty} dx\, \varphi(x)$, determinare la distribuzione $\mathcal{F}^2 \Theta_a$

2) Mostrare che $\lim_{a\to\infty} a\,\Theta_a = 0$ in $S'(\mathbb{R})$ (più in generale $a^k \Theta_a \to 0 \ \forall k>0$)

La trasf. di Fourier $\mathcal{F}$ su $S(\mathbb{R})$ è un operatore lineare con la proprietà fondamentale che $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathbb{1}$ e che $(\mathcal{F}^{-1}f)(k) = (\mathcal{F}f)(-k)$ per cui:

i) $$\langle \mathcal{F}f | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} f(y)\varphi(x)$$

$$= \int dy\, f(y) \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} \varphi(x) = \int dy\, f(y) (\mathcal{F}\varphi)(y) = \langle f | \mathcal{F}\varphi \rangle$$

dunque $(\mathcal{F}^2\varphi)(x) = \varphi(-x)$. Per cui

$$\langle \mathcal{F}^2\theta_a | \varphi \rangle = \langle \theta_a | \mathcal{F}^2\varphi \rangle = \int_a^{+\infty} (\mathcal{F}^2\varphi)(x)\, dx = \int_a^{\infty} \varphi(-x)\, dx$$

$x \to -x$

$$= \int_{-\infty}^{a} dx\, \varphi(x) = \langle 1 - \theta_{-a} | \varphi \rangle$$

$\Rightarrow \mathcal{F}^2\theta_a = 1 - \theta_{-a}$ nel senso delle distribuzioni.

2) $\lim_{a\to\infty} a^k \theta_a = 0$ il limite è in $S'(\mathbb{R})$

Questo limite esiste quando posso trovare una successione di distribuzioni $\{f_n\} \subset S'(\mathbb{R})$ tale che converga ad f per $n\to\infty$ quando

$$\langle f_n | \varphi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f | \varphi \rangle \qquad \text{Questo limite è in } \mathbb{C}$$

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

Lo nostro $f_n = n^k \theta_n$ ed $f = 0$.

$$\lim_{a\to\infty} \langle a^k\theta_a | \varphi \rangle = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a^{-k}} \int_a^{\infty} dx\, \varphi(x) \sim \frac{0}{0} \text{ indefinito}$$

usiamo l'Hôpital

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{\partial_a \int_a^{\infty} dx\, \varphi(x)}{\partial_a a^{-k}} = \lim_{a\to\infty} \frac{\cancel{\varphi(\infty)} - \varphi(a)}{-k a^{-k-1}}$$

0 poiché $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$= \frac{1}{k} a^{k+1}\varphi(a) \longrightarrow 0$$

poiche $\varphi \in S(\mathbb{R})$ decresce più rapidamente di ogni polinomio

$\forall k > 0 \;\; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \lim_{a\to\infty} a^k \theta_a = 0 \text{ in } S'(\mathbb{R})$$

· Esercizio 19/07/19

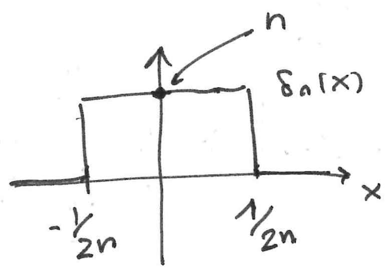
Si consideri la ~~funzione~~ successione di funzioni $\delta_n(x) = n$ per $|x| \le \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ altrove, $n = 1, 2, \dots$

i) La successione è convergente in $L^1(\mathbb{R})$?

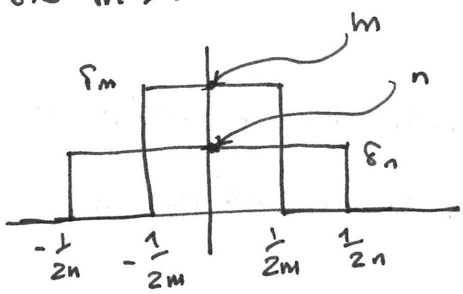
ii) La successione è convergente in $S'(\mathbb{R})$?

Abbiamo

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & |x| \le \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



i) Vediamo se la successione di Cauchy converge: sia $m > n$



$$\| \delta_m - \delta_n \|^2_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\delta_m - \delta_n| \ge \left| \int_{\mathbb{R}} \delta_m - \delta_n \right|$$

$$\ge \left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\, dx - \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} m\, dx \right| \ge n \left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dx - \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} dx \right|$$

$$\ge n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \ge 1 - \frac{n}{m} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n, m \to \infty$$

Per cui il limite non esiste in $L^1(\mathbb{R})$. Ma ce lo aspettavamo poiché questa funzione al limite sembrerebbe essere una delta di Dirac, ma questa non è in $L^1(\mathbb{R})$.

ii) In $S'(\mathbb{R})$ cerchiamo $\delta \in S'(\mathbb{R})$ t.c.

$$| \langle \delta_n | \varphi \rangle - \langle \delta | \varphi \rangle |_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Vediamo che

$$\langle \delta_n | \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dx\, n \varphi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{n} n \varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\, \varphi\left(\frac{y}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\, \varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\, \varphi(0) = \varphi(0)$$

Per cui $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta(x)$ Dirac. Vediamo se funziona

$$|\langle \delta_n | \varphi \rangle - \varphi(0)| \leq \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dx\, |n\varphi(x) - \varphi(0)| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\, \left|\varphi\left(\frac{y}{n}\right) - \varphi(0)\right|$$

thm di Lagrange $\Rightarrow$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\, \left|\frac{y}{n}\varphi'(c)\right| \leq \frac{1}{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sup_y |y\varphi'(y)| = \frac{1}{n}\|\varphi\|_{1,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dove $c \in (0, \frac{y}{n})$

Per cui

- $\delta_n(x)$ non ha limite in $L^1(\mathbb{R})$
- $\delta_n(x)$ ha limite in $S'(\mathbb{R})$ alla delta di Dirac in zero.

- Esercizio 19/07/2017

Si consideri su $S(\mathbb{R})$ il funzionale $F_n : \langle F_n | \varphi \rangle = \int_0^\infty dx\, \sin^2(nx)\varphi(x)$
Si dimostri che definisca una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata. Si determini il limite $n\to\infty$ della successione F_n in $S'(\mathbb{R})$.

1) Lineare $\to$ ovvio. Limitato:

$$|\langle F_n|\varphi\rangle| = \left|\int_0^\infty dx\, \sin^2(nx)\varphi(x)\right| \leq \int_0^\infty dx\, |\sin^2(nx)|\,|\varphi(x)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\sin^2(nx)|\,|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi(x)| \, \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}\right)$$

2) $\langle F_n' | \varphi \rangle = - \langle F_n | \varphi' \rangle = - \int_0^\infty dx \, \sin^2(nx) \, \varphi'(x)$

$$= - \cancel{\sin^2(nx)\varphi(x)}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty dx \, \sin(nx) \, \varphi(x) 2n \ldots$$

$$= \int_0^\infty dx \; n \sin(2nx) \, \varphi(x) = \langle n \sin(2nx) | \varphi \rangle$$

$\Rightarrow \; F_n' = n \sin(2nx)$

3) $\lim_{n\to\infty} \langle F_n | \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty dx \, \sin^2(nx) \, \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1-\cos(2nx)}{2} \varphi(x)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^\infty \cos(2nx) \, \varphi(x) \, dx \right)$$

mo vediamo che

$$\left| \int_0^\infty \cos(2nx) \, \varphi(x) \right| = \left| \cancel{\frac{\sin(2nx)\varphi(x)}{n}} - \int_0^\infty \frac{\sin(2nx)}{n} \varphi'(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty dx \, |\varphi'(x)| \leq \frac{c}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Per cui

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{1}{2} \Theta(x)$$