(A)

SERIE DI FOURIER

proposizione) Le funzioni trigonometriche $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)$ $n=1,2\ldots$ sono un sistema ortonormale completo in $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$

def.) un insieme ortonormale $\{u_a\}_{a\in A}$ di vettori $(u_a|u_b)=0$ se $a\neq b$ e $\|u_a\|=1$, è completo se non è un sottoinsieme di un altro set ortonormale

un set ortonormale $\{u_a\}_{a\in A}$ è completo se $(u_a|x)=0 \ \forall a\in A \Rightarrow x=0$

uno spazio di Hilbert con un set di vettori ortonormale numerabile è separabile ed è isomorfo a $\ell^2(\mathbb{C})$ $\quad \left(\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty\right\}\right)$

def.) uno spazio di Hilbert è separabile se ha un sottoinsieme denso numerabile

teorema Identità di Parseval) in uno spazio di Hilbert separabile, se $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una base completa ortonormale allora

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(u_k|x)u_k \qquad \|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(u_k|x)|^2$$

$$(x|y)=\sum_{k=1}^{\infty}(x|u_k)(u_k|y)$$

i numeri (u_k,x) sono i coefficienti di Fourier dell'espansione $\quad x,y\in\mathcal{H}$

attraverso un cambio di scala, la base di Fourier in $\mathbb{L}^2(a,b)$ è

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right), \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right) \quad n=1,2\ldots$$

o equivalentemente $\quad u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\exp\left(i\frac{2\pi n}{b-a}x\right) \quad n\in\mathbb{Z}$

poiché $\{u_n\}$ è un set ortonormale completo, qualsiasi funzione in $\mathbb{L}^2(a,b)$ ha l'espansione di Fourier

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n u_n \qquad f_n=(u_n|f)=\int_a^b dx\,\overline{u_n(x)}\,f(x)$$

dove la convergenza è in norma $\mathbb{L}^2$

$S_N=\sum_{n=-N}^{N}(u_n|f)u_n$ allora $\|S_N-f\|^2=\int_a^b dx\,|S_N-f|^2 \rightarrow 0$ per $N\rightarrow\infty$

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2=\int_a^b dx\,|f(x)|^2$$

$\mathbb{L}^2[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,f(x)\cos kx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\,f(x)\sin kx$$

esercizio) Si consideri $f(x)=\sin(x/2)$

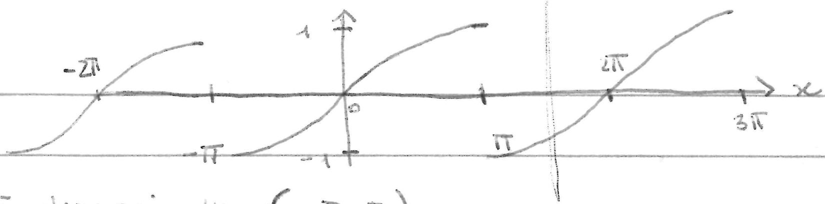
(i) si calcoli lo sviluppo di Fourier di f in $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$

(ii) se ne discuta la convergenza puntuale, e commentare il valore della serie in $x=\pi$

(iii) quanto vale la somma della serie in $x=3\pi/2$?

(B)

i) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$



$f(x)$ è dispari in $(-\pi, \pi)$

considerando la base $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos Kx, \operatorname{sen} Kx\right)_{K=1}^{\infty}$
mi aspetto a_K nulli
dove $a_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx\, \underline{f(x) \cos Kx}$ $(K = 1, \dots \infty)$ f dispari con integrale pari
e b_K non nulli
dove $b_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx\, \underbrace{f(x) \operatorname{sen} Kx}_{\text{pari}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}^2}\int_0^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} Kx$

$$\int_0^{\pi} dx\, \underbrace{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} Kx}_{\frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(\frac{1}{2}-K\right)x\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2}+K\right)x\right)\right]} = \quad \left(\begin{array}{c}\text{oppure} \\ \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\end{array}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}-K\right)x\Big|_0^{\pi} = \cos\frac{x}{2}\cos Kx + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} Kx\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \operatorname{sen}\pi K + (-1)^K = (-1)^K$$
$$\cos\left(\frac{1}{2}+K\right)x\Big|_0^{\pi} = \cos\frac{x}{2}\cos Kx - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} Kx\Big|_0^{\pi} =$$
$$= -\operatorname{sen}\pi K + (-1)^K = (-1)^K$$

$$\int_0^{\pi} dx \cos \alpha x = \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-K\right)}\cos\left(\left(\frac{1}{2}-K\right)x\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}+K}\cos\left(\left(\frac{1}{2}+K\right)x\right)\right]_0^{\pi} = F_K$$

$$F_K = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-K\right)}(-1)^K - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+K\right)}(-1)^K\right] =$$
$$=(-1)^K\left[\frac{1}{1+2K} - \frac{1}{1-2K}\right] = \frac{4K(-1)^K}{(1-4K^2)}$$

$$b_K = \frac{8K(-1)^K}{(\sqrt{\pi})^2(1-4K^2)}$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\, dx = 0$$

(*) convergenza in norma L^2

$$f(x) \overset{(*)}{=} \sum_{K=1}^{\infty} F_K \frac{2}{(\sqrt{\pi})^2}\operatorname{sen} Kx = \sum_{K=1}^{\infty} b_K \operatorname{sen} Kx$$

ii) (convergenza puntuale) $S_N(x) = \sum_{K=1}^{N} b_K \operatorname{sen} Kx$

$$\forall x \in (-\pi, \pi)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists M_{\varepsilon x} \mid |S_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq M_{\varepsilon x}$$

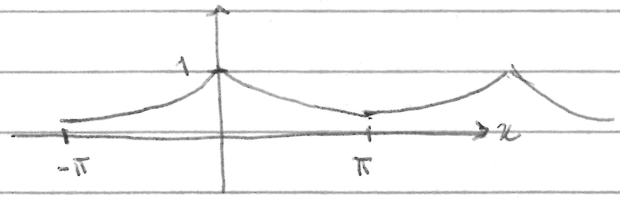
→ corollario teorema del Dini) se f è una funzione limitata 2π-periodica con solo un numero finito di discontinuità del primo tipo (limite sinistro e destro esistono per ogni discontinuità) su $[0, 2\pi]$, e se le derivate sinistra e destra esistono ovunque, allora la serie di Fourier è puntualmente convergente dove f è continua e assume il valore $\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$ alla discontinuità

$S_N(x)$ converge puntualmente ad $f(x)$
$\forall x \neq \pi + 2K\pi \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

$S_N(x)$ converge puntualmente a 0
$\forall x = \pi + 2K\pi$

iii) $$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^K 8K}{\pi(1-4K^2)}\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi K\right) = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{16K}{\pi(1-16K^2)}(-1)^K$$

esercizio) Si consideri la funzione $f(x) = \exp(-|x|)$
(i) se ne determini lo sviluppo di Fourier in $L^2(-\pi,\pi)$
(ii) Sapreste ottenere da tale sviluppo il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$?



$f(x)$ è pari $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$

$f(x)$ continua $\Rightarrow$ serie di Fourier converge puntualmente ad f (periodicizzata)

(i) $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-|x|} \cos kx \underset{(\text{pari})}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\, e^{-x}\cos kx =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\, e^{-x}\frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx \left(e^{x(ik-1)} + e^{x(-ik-1)}\right) =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{x(ik-1)}}{ik-1}\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{x(-ik-1)}}{-ik-1}\Big|_0^{\pi}\right) =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{ik\pi}e^{-\pi}}{ik-1} - \frac{1}{ik-1} + \frac{e^{-ik\pi}e^{-\pi}}{-ik-1} - \frac{1}{-ik-1}\right) =$ $\quad k \in \mathbb{Z}^+$

$e^{ik\pi} = \cos k\pi + i \sin k\pi = \begin{cases} -1 & k = 1, 3, 5, \dots \\ 1 & k = 2, 4, 6 \end{cases} = (-1)^k$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k e^{-\pi}}{(ik-1)} - \frac{1}{(ik-1)} + \frac{(-1)^k e^{-\pi}}{-ik-1} - \frac{1}{-ik-1}\right) =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k e^{-\pi}(\cancel{-ik}-1) + \cancel{ik} + 1 + (-1)^k e^{-\pi}(\cancel{ik}-1) - \cancel{ik} + 1}{1+k^2}\right) =$ $\quad -2(-1)^k e^{-\pi}$

$= \frac{1}{\pi(1+k^2)}\left(2 - 2(-1)^k e^{-\pi}\right) = \frac{2\left(1 - (-1)^k e^{-\pi}\right)}{\pi(1+k^2)}$

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{1}{\pi}\left(1 - e^{-\pi}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+k^2}\right)\cos kx$

$a_0 = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-|x|}}_{= a_{k=0}}$

(ii) volendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ proviamo a valutare $f(x)$ nei punti $x=0$ e $x=\pi$

$x = 0 \quad \begin{cases} 1 = f(0) = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)}{\pi(1+k^2)} \\ \\ e^{-\pi} = f(\pi) = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^k e^{-\pi}\right)}{\pi(1+k^2)}(-1)^k \end{cases}$

$x = \pi$

definendo $S_+ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} \qquad S_- = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}$

$\begin{cases} 1 - \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(S_+ - e^{-\pi} S_-\right) \\ e^{-\pi} - \dots \end{cases}$ sistema di ... equazioni dalla prima $S_- = e^{\pi}\left(S_+ - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}\right)\right)$

inserisco nella seconda $\frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} - \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}\right) = e^{\pi}S_+ - \frac{\pi}{2}e^{\pi}\left(1-\frac{1-e^{-\pi}}{\pi}\right) - e^{-\pi}S_+$

$$S_+\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\left[e^{-\pi} - \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + e^{\pi} - \frac{e^{\pi}-1}{\pi}\right]$$

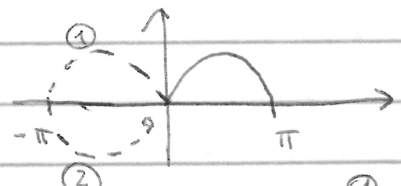
$$S_+ = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} + \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\underbrace{\left(\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right)}_{\frac{\cosh\pi}{\operatorname{senh}\pi} = \tanh\pi}$$

esercizio) Si determini nello spazio $L^2[0,\pi]$ un'espansione della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ in armoniche della sola funzione coseno. Si discuta il tipo di convergenza della serie ottenuta e si ottenga come conseguenza il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

$f(x)$ estesa nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ in modo che sia periodica nell'intervallo $(-\pi,\pi)$

$\tilde f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$ (estensione pari) → sviluppo di Fourier in $(-\pi,\pi)$ in soli $\cos(kx)$



① estensione pari
② estensione dispari ($\tilde f(x) = \operatorname{sen} x$)

(i) $\tilde f(x)$ pari $\Rightarrow b_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos kx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4i}\int_0^{\pi}\left(e^{(ik+i)x} + e^{(i-ik)x} - e^{(ik-i)x} - e^{(-ik-i)x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{ik\pi}e^{i\pi}}{i(k+1)} - \frac{2}{i(k+1)} + \frac{e^{i\pi}e^{-ik\pi}}{i(-k+1)} - \cancel{\frac{1}{i(-k+1)}}\right.$$

$$\left. - \frac{e^{ik\pi}e^{-i\pi}}{i(k-1)} + \frac{2}{i(k-1)} - \frac{e^{-ik\pi}e^{-i\pi}}{-i(k+1)} + \cancel{\frac{1}{-i(k+1)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{-e^{ik\pi} - 2 - e^{-ik\pi}}{i(k+1)} + \frac{e^{-ik\pi} + e^{ik\pi} + 2}{i(k-1)}\right] =$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{\overbrace{1+\cos kx}^{(-1)^k}}{k+1} - \frac{1+\cos kx}{k-1}\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1+(-1)^k)\left[(k-1) - \overset{(k+1)}{\cancel{\quad\quad}}\right]}{(k^2-1)} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{(1+(-1)^k)}{k^2-1} = \begin{cases} a_{2k} = -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

su $(0,\pi)$ allora $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{2\ell}\cos(2\ell x)$ ★

$\longrightarrow$ serie converge in $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$ a $\tilde{f}(x)$ su $(-\pi,\pi)$ (★ vale in norma $\mathbb{L}^2(0,\pi)$)

convergenza puntuale?

corollario del teorema del Dini $\Rightarrow$ convergenza puntuale su $(-\pi,\pi)$

(★ convergenza puntuale su $(0\ \pi)$)

$x = 0$ $\qquad 0 = \operatorname{sen}(x=0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{4\ell^2-1} \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{4\ell^2-1} = \frac{1}{2}$

TRASFORMATA DI FOURIER

consideriamo l'espansione di Fourier di una funzione sull'intervallo $[-L/2, L/2]$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi kx/L}}{L}\,f_k \qquad f_k = \int_{-L/2}^{L/2} dy\, e^{-\frac{i2\pi ky}{L}} f(y)$$

consideriamo la nuova variabile $s = 2\pi k/L$ con spaziatura $\delta s = 2\pi/L$

$$f(x) = \sum_s \delta s\,\frac{e^{isx}}{2\pi}\tilde{f}(s) \qquad \tilde{f}(s) = \int_{-L/2}^{L/2} dy\, e^{-isy} f(y)$$

se f è integrabile, la funzione $\tilde{f}(s)$ esiste per $L\to\infty$

se $\tilde{f}$ è sufficientemente regolare, non cambia sulla scala δs, e la somma potrebbe essere sostituita da un integrale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{2\pi}\,e^{isx}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-isy} f(y)}$$

$\llcorner$ componenti di Fourier $(\mathcal{F}f)(s)$

funzione continua dell'indice delle componenti (che pesa le componenti di Fourier)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\,e^{isx}(\mathcal{F}f)(s)$$

$$\left.(\mathcal{F}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-isy} f(y)\right]$$ integrale di Fourier di f

(F)

$\mathcal{F}$ come operatore sullo spazio $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{F}f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-isy} f(y)$$

$\Rightarrow \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

$$|(\mathcal{F}u)(k)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} u(y)\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} |e^{-iky} u(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, |u(y)|$$

$$|(\mathcal{F}u)(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(x)\|_1 \quad \forall k$$

$\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabili | limitate$\}$

ovvero data f, c'è una costante M_f tale che l'insieme dove $|f(x)| > M_f$ ha misura di Lebesgue nulla

$\downarrow$

l'inf di tali limiti M_f è $\|f\|_\infty$

$$\|f(x)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

dunque $\mathcal{F}$ è un operatore lineare da $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ a $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|\mathcal{F}u\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_1$$

è anche continuo: se $u_n \to 0$ in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}u_n \to 0$ uniformemente (ovvero in $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$)

(teorema di Riemann-Lebesgue) se $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ allora $(\mathcal{F}f)$ è limitata e continua e

$$\lim_{|k|\to\infty} |(\mathcal{F}f)(k)| = 0$$

(teorema di inversione) se $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$

associativo, commutativo e distributivo $\leftarrow$ (prodotto di convoluzione) il prodotto di convoluzione di $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} dy\, f(x-y)\, g(y)$$

è una funzione in $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$$

$\Rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$

def.) Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ di funzioni rapidamente decrescenti è l'insieme delle funzioni C^∞ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi\|_{m,n} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m (D^n \varphi)(x)| < \infty$$

lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è uno spazio lineare e $\|\cdot\|_{m,n}$ è una famiglia di seminorme per esso

(teorema) la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ e l'antitrasformata $\mathcal{F}^{-1}$ sono mappe continue da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in se stesso

la limitatezza implica che la trasformata di Fourier è continua

teorema di inversione) $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} (\mathcal{F}\varphi)(k)$

(prodotto di convoluzione) ...

$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

teorema) le funzioni di Hermite h_n sono un set ortonormale e completo in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}$ è isometrico su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$) e lo spazio di Schwartz è denso in $\mathbb{L}^2$, l'operatore può essere esteso ad un operatore unitario $\hat{F}$ su $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$\hat{F} f = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (h_n | f) h_n$$

($f = \sum_n (h_n | f) h_n$, $f_N = \sum_n^N (h_n|f) h_n$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ convergente ad f

$\mathcal{F} f_N = \sum_n^N (-i)^n (h_n | f) h_n$

ma $\mathcal{F} f_N$ è una successione di Cauchy

il cui limite definisce l'operatore di Fourier-Plancherel

$$\hat{F} f = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (h_n | f) h_n \;)$$

le funzioni di Hermite sono autofunzioni della trasformata di Fourier

$$(\mathcal{F} h_n)(k) = (-i)^n h_n(k)$$

---

esercizio) Si calcoli la trasformata di Fourier $(\mathcal{F}f)(k)$ di

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+(x-y)^2)(1+y^2)} dy$$

$$(\mathcal{F} f)(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{1+(x-y)^2} \frac{1}{1+y^2} \overset{u = x-y \;\; (u=u(x))}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} e^{-iku} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{1+y^2} =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-iku} \frac{1}{1+u^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} \frac{1}{1+y^2} = \sqrt{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{-iku} \frac{1}{1+u^2} \right)^2$$

$$= \sqrt{2\pi} \left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)(k) \right)^2$$

Nota $\Longrightarrow$ $f(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{1+(x-y)^2} \frac{1}{1+y^2}}_{\text{convoluzione}} \overset{g(y) = 1/1+y^2}{=} \int_{\mathbb{R}} dy \, g(x-y) g(y) = (g * g)$

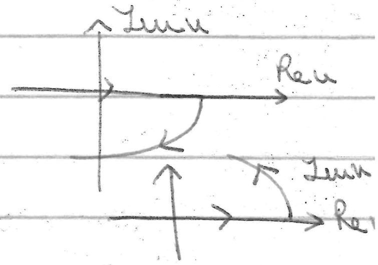
$$(\mathcal{F} f)(k) = \mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(g) \; (k)$$

calcoliamoci $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iku}}{1+u^2}$

$f(u) = \frac{e^{-iku}}{1+u^2}$ ha due poli $u_1 = i$, $u_2 = -i$

$h(u) = \frac{1}{1+u^2} \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$

$\notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (non è limitata)



se $k>0$ $\quad e^{-iku} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$ per $\mathrm{Im}\, u < 0$

se $k<0$ $\quad$ per $\mathrm{Im}\, u > 0$

se $k=0$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+u^2}$

applichiamo il teorema dei residui

$k>0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i (-1) \mathrm{Res}(f, -i) = \sqrt{2\pi}(-i) \frac{e^{-iku}\cancel{(u+i)}}{\cancel{(u+i)}(u-i)}\Big|_{u=-i}$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-k}$

$k<0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi i (+1) \mathrm{Res}(f, i) = \sqrt{2\pi}(i) \frac{e^{-iku}\cancel{(u-i)}}{(u+i)\cancel{(u-i)}}\Big|_{u=i} =$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{k}$

$k=0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan(u)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|k|}$

ovvero $\quad \mathcal{F}(f(x))(k) = \sqrt{2\pi}\, \frac{\pi}{2}\, e^{-2|k|}$

Esercizi vari)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \cos kx = e^{y\cos x} \cos(y \sin x)$

$e^{y\cos x}\cos(y \sin x) = e^{y\cos x}\, \frac{e^{iy\sin x} + e^{-iy\sin x}}{2} =$

$= \frac{e^{y(\cos x + i\sin x)} + e^{y(\cos x - i \sin x)}}{2} =$

$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} (\cos x + i \sin x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} (\cos x -$

$- i \sin x)^n \Big] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \left(e^{inx} + e^{-inx} \right) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cos nx$

esercizio) si calcoli $\lim_{k\to\infty} \underbrace{k\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overbrace{\frac{\mathrm{sen}(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}}^{g(x)}\, e^{-ikx}}_{I(k)}$

teorema di Riemann-Lebesgue: $f\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}f$ è continua e limitata

$\lim_{|k|\to\infty} |(\mathcal{F}f)(k)| = 0$

osservazione $ke^{-ikx} = \partial_x(ie^{-ikx})$

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} dx\, ke^{-ikx} g(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \partial_x(ie^{-ikx})\, g(x) =$$

$$= \underbrace{ie^{-ikx} g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} dx\, ie^{-ikx}\partial_x(g(x))$$

$$I(k) = -i\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx}\partial_x g(x) = -i\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(\partial_x g(x))(k)$$

$$\partial_x g(x) = \frac{2x\cos(x^2)[1+x^2]^{3/2} - 3[1+x^2]^{1/2} x\,\mathrm{sen}(x^2)}{[1+x^2]^3}$$

$$\partial_x g(x) \sim \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}} \qquad (\partial_x g(x)\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}))$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx < \infty \qquad \int_{\mathbb{R}} |\partial_x g(x)|\, dx \sim \int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}} < \infty\right)$$

$$I(k) = -i\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx}\overbrace{\left(\frac{2x\cos(x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{3x\,\mathrm{sen}(x^2)}{(1+x^2)^{5/2}}\right)}^{h(x)}\right] \qquad (k>0)$$

posso calcolare attraverso il teorema dei residui oppure usando il teorema di R.L. dire che

$$\lim_{k\to\infty} |I(k)| = 0 \qquad (h(x)\in\mathbb{L}^1(\mathbb{R}))$$

esercizio) trovare una soluzione dell'equazione integrale

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x-y)\, e^{-y^2}}_{\text{convoluzione}} = \underbrace{-\frac{\sqrt{\pi}}{8}\, x\, e^{-\frac{3}{4}x^2}}_{h(x)}$$

$$\mathcal{F}(f * e^{-y^2}) = \sqrt{2\pi}\,\underbrace{\mathcal{F}(f)(k)}_{\hat{f}(k)}\cdot\underbrace{\mathcal{F}(e^{-y^2})(k)}_{\hat{g}(k)}$$

dunque abbiamo

$$\sqrt{2\pi}\ \hat{f}(k)\,\hat{g}(k) = \hat{h}(k)$$

ovvero $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{h}(k)}{\hat{g}(k)}$

$$\hat{h}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{8} x e^{-\frac{3}{4}x^2}\right) e^{-ikx} =$$

$$= \partial_k \Big[\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i\sqrt{\pi}}{8} e^{-\frac{3}{4}x^2}\right) e^{-ikx}}_{} \Big]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \left(A e^{-Bx^2}\right) e^{-ikx} = C e^{-Dk^2}$$

trasformata di Fourier di una gaussiana

$$\hat{g}(k) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} e^{-ikx} \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+\frac{ik}{2})^2} e^{-k^2/4} =$$

completato il quadrato

$$-(x+\tfrac{ik}{2})^2 = -x^2 - ikx + \frac{k^2}{4}$$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{-k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} = \frac{e^{-k^2/4}\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2\pi})}$$

$x + \frac{ik}{2} = y$

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-B(x+\frac{ik}{2B})^2} e^{-k^2/4B} =$$

$$A \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/4B} = C e^{-Dk^2}$$

$$C = \frac{A}{\sqrt{2}} \qquad D = \frac{1}{4B}$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial_k \left[\frac{i\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} e^{-\frac{4}{12}k^2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{k^2/4} \frac{i}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} 2k\right) e^{-k^2}$$

$$= -\frac{i}{12\sqrt{2}} k\, e^{-k^2/12}$$

$$f(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \left(-\frac{i}{12\sqrt{2}} k\, e^{-k^2/12}\right) = \partial_x \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} h(k)$$

dove $h(k) = -\frac{e^{-k^2/12}}{12\sqrt{2}}$

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ polinomio di Hermite

$h_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$ funzione di Hermite

esercizio) Sia $H = F + F^+$ dove $\underbrace{F \text{ è l'operatore di Fourier-Plancherel}}$ su $L^2(\mathbb{R})$

estensione della trasf. di Fourier allo spazio $L^2(\mathbb{R})$

(i) Ker H e proiettore su tale sottospazio

(ii) H limitato, $\|H\|$ sup

(i) $F(f) = \sum_{n\geq 0} (-i)^n (h_n|f)\, h_n$

(h_n funzione di Hermite $\mathcal{F} h_n = (-i)^n h_n$)

$$(F^+(h)|g) = (h|F(g)) = \sum_{n\geq 0} (-i)^n (h_n|g)(h|h_n) =$$
$$= \Big(\sum_{n\geq 0} (i)^n (h|h_n)\, h_n \,\Big|\, g\Big)$$

ovvero $F^+(h) = \sum_{n\geq 0} (i)^n (h_n|h)\, h_n$

antilinearità del prodotto scalare

$H = F + F^+$

$$H(f) = F(f) + F^+(f) = \sum_{n\geq 0} (i)^n (h_n|f)[1 + (-1)^n]\, h_n = 2\sum_{n\geq 0} (i)^{2n} (h_{2n}|f)\, h_{2n}$$
$$= 2\sum_{n\geq 0} (-1)^n (h_{2n}|f)\, h_{2n}$$

dove h_{2n} è pari

($x \to -x$ $\quad H_n(x) \longrightarrow (-1)^n H_n(x)$)

ne deduciamo che se f fosse dispari $\underbrace{(h_{2n}|f)}_{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, h^*_{2n}(x) f(x)\, dx} = 0$

ovvero $H(f) = 0$

dunque $\mathrm{Ker}\, H = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid P f(x) = -f(x) \}$

($P: x \longrightarrow -x$)
operatore parità

insieme delle funzioni dispari

$$|\mathrm{Ker}\, H\rangle\langle \mathrm{Ker}\, H|\, f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

proiettore sul sottospazio Ker H

(ii) $\|Hf\|^2 \underset{(Hf|Hf)}{=} 4\sum_{n\geq 0} |(-1)^n (h_{2n}|f)|^2 = 4\sum_{n\geq 0} |(h_{2n}|f)|^2 \leq$

$\leq 4\sum_{n\geq 0} |(h_n|f)|^2 = 4\|f\|^2$

$\{h_n\}$ set completo di $L^2(\mathbb{R})$

dunque $\|H\| = \sup_{f(x)\in L^2(\mathbb{R})} \frac{\|Hf\|_2}{\|f\|_2}$

completezza
$(h_n|x) = 0 \ \forall n \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = 0$

$\|H\| \leq 2$

H è limitato

le funzioni di Hermite h_n sono un set ortonormale completo in $L^2(\mathbb{R})$

(N)

se inoltre considero $f(x) = h_0(x)$

$\|Hf\|^2 = 4 \sum_{n\geq 0} |(h_{2n}|f)|^2 = 4$

$\|f\|^2 = |(h_0|h_0)|^2 = 1$

e dunque $\frac{\|Hh_0\|_2}{\|h_0\|_2} = 2$

ovvero $\|H\| = 2$

esercizio)

serie di Fourier $\mathbb{L}^2(-\pi,\pi)$

$f(x) = \cos ax$

due possibilità (rispettivamente al set di espansione scelto)

(i) $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \operatorname{sen} kx + a_k \cos kx)$

dove $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos kx$

$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \operatorname{sen} kx$

(ii) $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

dove $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{ikx}$

utilizziamo la procedura (ii)

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ax\, e^{ikx} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{iax} + e^{-iax}) e^{ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(a+k)x} + e^{i(k-a)x})\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i(a+k)x}}{i(a+k)} + \frac{e^{i(k-a)x}}{i(k-a)} \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i(a+k)\pi} - e^{-i(a+k)\pi}}{i(a+k)} + \frac{e^{i(k-a)\pi} - e^{-i(k-a)\pi}}{i(k-a)} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\operatorname{sen}((a+k)\pi)}{k+a} + \frac{\operatorname{sen}((k-a)\pi)}{k-a} \right)$$

$f(x)$ è infatti pari in $(-\pi, \pi)$

notiamo che $c_{-k} = c_k$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k} e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}}_{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}} 2 \cos kx}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} a\pi}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(a+k)\pi}{k+a} + \frac{\operatorname{sen}(k-a)\pi}{k-a} \right)}_{\frac{k[\overbrace{\operatorname{sen} a+k\pi + \operatorname{sen} k-a\pi}^{2 \operatorname{sen} k\pi \cos a\pi}] + a[\underbrace{\operatorname{sen} k-a\pi - \operatorname{sen} a+k\pi}_{2\cos k\pi \operatorname{sen} a\pi}]}{k^2-a^2}} \cos kx$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} a\pi}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \, 2a \operatorname{sen} a\pi}{\pi (k^2-a^2)} \cos kx$$

esercizio) calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$

$$I_k = (\mathcal{F}(f))(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}$$

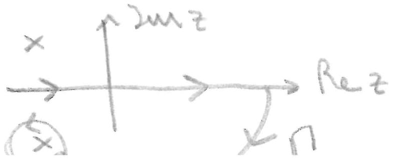
estendiamo al piano complesso

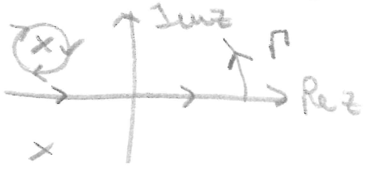
$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{f(z) e^{-ikz}}_{h(z)}$$

consideriamo i poli di $h(z)$

$$z^2+z+1=0 \qquad z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{5}{6}\pi}$$

$k>0 \Rightarrow \operatorname{Im} z < 0$ $\qquad$ $k<0 \Rightarrow \operatorname{Im} z > 0$





(P)

$$K>0 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint_\Gamma h(z)\,dz = I_K + \overbrace{\int_{C_R}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}h(z)}^{\substack{R\to\infty\\ =0}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\pi i \,\mathrm{Res}\left(h\, e^{-i\frac{5}{6}\pi}\right)$$

$$I_K = -\frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z\to e^{-i5/6\pi}} \frac{(z-e^{-i\frac{5}{6}\pi})\, z\, e^{-ikz}}{z^2+z+1} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{(1+i\sqrt{3})\,e^{iK/2}\,e^{-\sqrt{3}K/2}}{\mathrm{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(1+i\sqrt{3})e^{iK/2}e^{-\sqrt{3}K/2}$$

$$K<0 \quad I_K = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Res}\left(h\,e^{i5/6\pi}\right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{2\pi}}\lim_{z\to e^{i5/6\pi}}\frac{(z-e^{i\frac{5}{6}\pi})\,z\,e^{-ikz}}{z^2+z+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{(-1+i\sqrt{3})\,e^{iK/2}\,e^{K\sqrt{3}/2}}{\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi} =$$

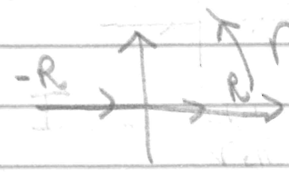
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-1+i\sqrt{3})\,e^{iK/2}\,e^{K\sqrt{3}/2}$$

$$e^{-i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$K=0$ $\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{z}{z^2+z+1}$ non definito, per cui dovrei considerare la parte principale di Cauchy

$$P\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{z}{z^2+z+1} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}dz\,\frac{z}{z^2+z+1}$$

potrei applicare il teorema dei residui convenientemente



$$\oint_\Gamma dz\, h_0(z) = P\int_{-\infty}^{\infty}dz\, h_0(z) + \int_{C_R}dz\, h_0(z)$$

$$\int_{C_R}dz\, h_0(z) = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\vartheta}\,Re^{i\vartheta}\,d\vartheta}{R^2e^{2i\vartheta}+Re^{i\vartheta}+1} = \int_0^\pi\frac{R^2 i e^{2i\vartheta}}{R^2e^{2i\vartheta}+Re^{i\vartheta}+1}d\vartheta$$

$z = Re^{i\vartheta}$
$dz = Rie^{i\vartheta}d\vartheta$

non riesco a maggiorare l'integranda in modo da dimostrare che il contributo è nullo, non per niente non è nullo

non conviene applicare il teorema dei residui

$$\underset{(k\neq 0)}{I_k} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\, e^{ik/2}\left(-1 - i\,\mathrm{sgn}(k)\sqrt{3}\right) e^{-\mathrm{sgn}(k)k\sqrt{3}/2}$$

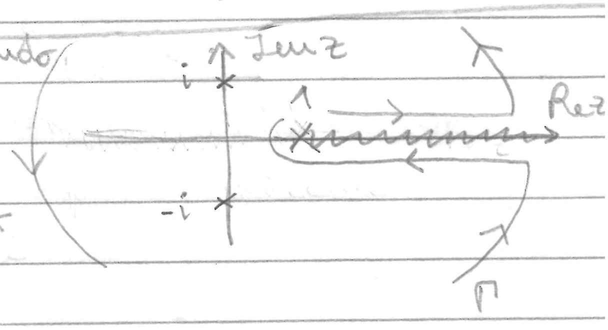
potrei estendere I_k in 0 e considerare I_0 uguale a $\lim_{k\to 0} \underset{(k\neq 0)}{I_k}$ se esiste (qualora non avessi idea del valore di I_0)

$$\lim_{k\to 0\,(k\neq 0)} I_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{-\pi}{\sqrt{3}}$$

come atteso

$$\left(I_0 = P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

esercizio) trovare l'integrale $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ partendo dall'integrale $I = \int_1^\infty \frac{\log(x-1)}{1+x^2}\,dx$



poli $\quad 1+z^2 = 0 \qquad z^2 = -1 = e^{i\pi}$

$$z = e^{\pm i\pi/2} = \begin{cases} e^{i\pi/2} \\ e^{i3\pi/2} \end{cases}$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I_\uparrow + I_\downarrow + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{=0} = -2\pi i\left(\mathrm{Res}(e^{i\pi/2}) + \mathrm{Res}(e^{i3\pi/2})\right)$$

(teorema della converg. dominata)

$$\log(z-1) = \log|z-1| + i\arg(z-1)$$

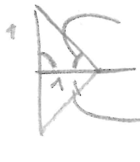
$$I_\downarrow = \underbrace{\int_\infty^1}_{-\int_1^\infty} \frac{\log|z-1| + i2\pi}{1+z^2}\,dz = -I_\uparrow - i2\pi\int_1^\infty \frac{dz}{1+z^2}$$

$$i2\pi\int_1^\infty \frac{dz}{1+z^2} = -i2\pi\left[\frac{\log|i-1| + i\arg(i-1)}{2i} + \frac{\log|-i-1| + i\arg(-i-1)}{-2i}\right] = -i2\pi\left(\frac{3i\pi/4}{2i} - \frac{5\pi/4}{2i}\right) ⋆$$

$$= -i2\pi\left(\frac{-2\pi/4}{2i}\right)$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} ⋆ = \frac{\pi}{4}$$

arctan(1)



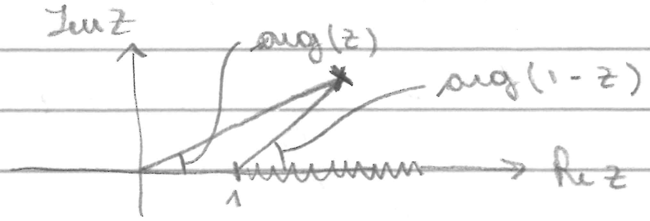
$$\arg(i-1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{3}{4}\pi$$

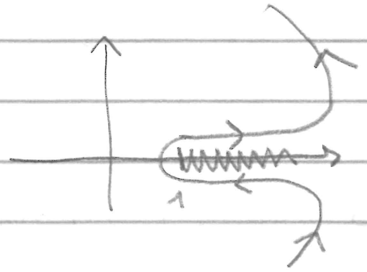
$$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{-3+8}{4}\pi \longrightarrow \frac{5}{4}\pi$$

R

ci possiamo aspettare che $\int^{\infty} \frac{\log(1-x)}{1+x^2}\,dx$ lo si possa trovare partendo dall' integrale 1 $\int_1^{\infty} \frac{\log^2(1-x)}{1+x^2}\,dx$ esercizio) consideriamo

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\log^2(1-x)}{1+x^2}\,dx$$





$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = I_\uparrow + I_\downarrow + \int_{C_R} f(z)\,dz =$$

$\vartheta \in [0, 2\pi)$

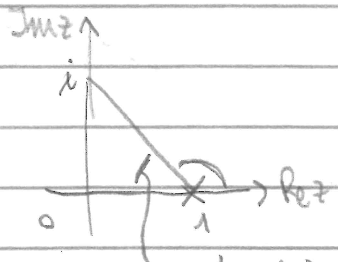
$$\log^2(1-z) = \underbrace{\log(1-z)}_{\log|1-z| + i\arg(1-z)}\log(1-z) = \log^2|1-z| + 2i\arg(1-z)\log|1-z| - \arg^2(1-z)$$

$$I_\uparrow = \int_1^{\infty} \frac{\log^2|1-z|}{1+z^2}\,dz$$

$$I_\downarrow = -\int_1^{\infty} \frac{\log^2|1-z| + 2i(2\pi)\log|1-z| - (2\pi)^2}{1+z^2}\,dz$$

$$\arg(1-z)\Big|_{z \to \rho e^{i2\pi}} = 2\pi$$

$$-\int_1^{\infty} \left(\frac{2i(2\pi)\log|1-z| - 4\pi^2}{1+z^2}\right)dz = +2\pi i\left(\operatorname{Res} f\, e^{i\pi/2}\right) + \operatorname{Res}(f\, e^{i}$$



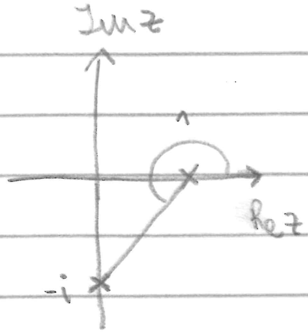
$$\operatorname{Res} f\, e^{i\pi/2} = \lim_{z \to e^{i\pi/2}} \left(\frac{z - e^{i\pi/2}}{z^2+1}\right)\left(\log^2|1-z| + 2i\arg(\right.$$
$$\left. - \arg^2(1-z)\right) \overset{*}{=}$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(1-z) = \pi - \arctan(1) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{e^{i\pi/2} - e^{i3\pi/2}}\left[\log^2\overbrace{|1-i|}^{\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\pi\log|1-i| - \frac{9}{16}\right.$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{4}\log^2 2 + \frac{i\pi}{4}\log 2 - \frac{9}{16}\pi^2\right)$$

$$\operatorname{Res} f e^{i\frac{3}{2}\pi} = \lim_{z \to e^{i\frac{3}{2}\pi}} \left(\frac{z - e^{i\frac{3}{2}\pi}}{z^2+1}\right)\Big(\log^2|1-z| + 2i \arg(1-z) \times$$
$$\times \log|1-z| - \arg^2(1-z)\Big) \circledast$$



$$\arg z = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \arg(1-z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{1}{e^{i\frac{3}{2}\pi} - e^{i\pi/2}} \left(\frac{1}{4}\log^2 2 + \frac{5}{2}\pi i \frac{1}{2}\log 2 - \left(\frac{5}{4}\pi\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{-2i}\left(\frac{1}{4}\log^2 2 + \frac{5}{4}\pi i \log 2 - \frac{25}{16}\pi^2\right)$$

$$-\int_1^\infty \left(\frac{2i(2\pi)\log|1-z| - 4\pi^2}{1+z^2}\right)dz = +\pi\left[\frac{i\pi}{4}\log 2 - \frac{9}{16}\pi^2 - \frac{i5}{4}\pi\log 2 + \right.$$
$$\left. + \frac{25}{16}\pi^2\right]$$

separando parte reale
e parte immaginaria

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty dx \, \frac{\log|1-x|}{1+x^2} = +\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\log 2 = \frac{\pi}{16}\log 2 \\ \displaystyle\int_1^\infty dx \, \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4\pi^2}\pi\left(-\frac{9}{16}\pi^2 + \frac{25}{16}\pi^2\right) = \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

---

esercizio) su $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ famiglia di funzionali lineari

$$F_n : f \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(x-n)^2}} f(x)\,dx \qquad n = 1, 2$$

dimostrare che F_n sono funzionali lineari limitati su $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $F_n \to 0$ in norma?

definiamo $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x-n)^2}}$ allora $F_n = (\varphi_n | \ )$

$$\|F_n f\| = |(\varphi_n | f)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x)\,dx\right| \overset{\text{disuguaglianza di Schwarz}}{\leq} \|\varphi_n\|_2 \|f\|_2$$

se $\|\varphi_n\|_2 < \infty$ ovvero $\varphi_n \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ allora F_n è limitato

(la linearità di F_n è conseguenza della linearità del prodotto scalare nel secondo membro)

(T)

$$y = x - n$$

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+(x-n)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{1+y^2} = \pi$$

dunque $\|F_n f\| \leq \sqrt{\pi}\, \|f\|_2$

se consideriamo $f = \varphi_n$ otteniamo $\|F_n f\| = \sqrt{\pi}\, \|f\|_2$

ovvero

$$\|F_n\| = \sup_{f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})} \frac{\|F_n f\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\pi}$$

$\lim_{n\to\infty} \|F_n - 0\| = \sqrt{\pi}$ per cui in norma la successione non converge a 0

Ricordiamo:
una sequenza di operatori in $\mathcal{B}(X\,Y)$ converge

(i) $\hat{A}_n$ converge in norma ad $\hat{A}$ se $\|\hat{A}_n - \hat{A}\| \to 0$

(ii) $\hat{A}_n$ converge fortemente ad $\hat{A}$: $\hat{A}_n x$ converge in Y-norma a $\hat{A}x$ per ogni $x \in X$

(iii) $\hat{A}_n$ converge debolmente ad $\hat{A}$ se $F\hat{A}_n x$ converge in $\mathbb{C}$ a $F\hat{A}x$ per ogni $x \in X$ ed $F \in Y^*$

duale di Y (funzionali lineari limitati)

consideriamo la convergenza forte a 0

$$|F_n f| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+(x-n)^2} f(x) \right|$$

$$\lim_{n\to 0} |F_n f - 0| = 0$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+(x-n)^2} f(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+(x-n)^2} |f(x)|$$

teorema della convergenza dominata

$$0 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{1+(x-n)^2} \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} |f(x)| = 0$$

$$\left| \frac{|f(x)|}{1+(x-n)^2} \right| \leq |f(x)| < \infty \quad \text{se } f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$$

ma poiché $\mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ è denso in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

allora per $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ $\exists\, g \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ tale che $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$

$$\|F_n f\| = \|F_n(f-g) + F_n g\| \leq$$

$$\leq \|F_n(f-g)\| + \|F_n g\| \leq$$

$$\leq \sqrt{\pi}\, \|f-g\|_2 + \|F_n g\| \leq \varepsilon\sqrt{\pi} + \|F_n g\|$$

ma su $F_n g$ posso usare il teorema della convergenza dominata

$$0 < |F_n f| \leq \varepsilon \sqrt{\pi}$$

e dunque $\lim_{n \to \infty} |F_n f - 0| = 0$ convergenza forte a 0

esercizio) nello spazio di Hilbert ℓ^2 sia ϕ_n un funzionale così definito $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$

mostrare che ϕ_n è limitato e trovarne la norma

$\lim_{n \to \infty} \phi_n$?

considerando $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_n$

$\rightarrow$ $\phi_n(x) = (\sum_{k=1}^{n} e_k, x) \Rightarrow \| \phi_n(x) \| = |(\sum_{k=1}^{n} e_k, x)| \leq \| \sum_{k=1}^{n} e_k \| \|x\|$

dove $\| \sum_{k=1}^{n} e_k \| = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} e_k | \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell)} = \sqrt{n}$ dunque

$\| \phi_n(x) \| \leq \sqrt{n} \|x\|$

consideriamo x tale che $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} e_k$ ($\|x\| = 1$)

allora $\| \phi_n(x) \| = \sqrt{n}$ ovvero $\|\phi_n\| = \sqrt{n}$

sui vettori finiti ϕ_n ha limite per $n \to \infty$, perché se x è tale che $x_k = 0$ per $k > N$ allora $\phi_n(x) = \phi_N(x)$ per $n \geq N$

per x generico ϕ_n non ha limite

es.) $x = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k$ $(x \in \ell^2)$ $\phi_n x = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$

$\rightarrow$ se $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_n(x)$, ψ_n è limitato con $\|\psi_n\| = 1$

e $\psi_n \to 0$ per $n \to \infty$ $\forall x$

dim.) dato $\varepsilon > 0$, sia x_F un vettore finito tale che

$\|x - x_F\| < \varepsilon$

allora $\|\psi_n(x)\| \leq \|\psi_n(x - x_F)\| + \|\psi_n(x_F)\| \leq$

$$\leq \underbrace{\|\psi_n\| \|x - x_F\|}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{(indipendentemente da } n)}} + \underbrace{\|\psi_n(x_F)\|}_{\to 0 \; (n \to \infty)}$$

ovvero qualunque vettore lo posso approssimare con un vettore finito

a quel punto posso dimostrare la convergenza forte di ψ_n a 0 esercizio)

se $p(x) = e^{-|x|}$, sia $q_n(x) = (1/2^n)\, p * p * \dots p$ prodotto di convoluzio di $p/2$ con se stesso n volte
mostrare che q_n è in $\mathbb{L}^1$ ed in $\mathbb{L}^2$ per ogni n e che $\|q_n\| \to 0$ per $n \to \infty$
se T_n è l'operatore in $\mathbb{L}^2$ tale che $T_n f = q_n * f \equiv g_n(x)$
trovare $\|T_n\|$, mostrare che T_n non ha autovettori e che $\forall f \; T_n f \to 0$

$$\frac{p}{2} \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$$

sapendo che la convoluzione di due funzioni di $\mathbb{L}^1$ è in $\mathbb{L}^1$ $\Rightarrow$ $q_n \in \mathbb{L}^1 \; \forall n$

sapendo che la convoluzione di una funzione di $\mathbb{L}^1$ con una di $\mathbb{L}^2$ è in $\mathbb{L}^2$ $\Rightarrow$ $q_n = q_{n-1} * \frac{p}{2} \in \mathbb{L}^2 \; \forall n$

operatore di Fourier

$$\left[F \frac{p(x)}{2}\right](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \text{dunque} \quad [F q_n(x)](\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^n}$$

$$\|[F q_n(x)](\omega)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^{2n}} \longrightarrow 0 \text{ per } n \to \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} e^{-|x|} = \int_0^{\infty} dx\, e^{-ikx-x} + \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{-ikx+x} = -\frac{1}{-ik-1} + \frac{1}{-ik+1} = 2/(1+k^2)$$

teorema convergenza dominata

$$\left(\left[\frac{1}{(1+\omega^2)^{2n}} \le \frac{1}{1+\omega^2} < \infty\right.\right.$$ poic

posso applicarlo poiché l'integrando è maggiorato da una funzione limitat

consideriamo $T_n f \equiv q_n * f \equiv g_n$

$$[F g_n(x)](\omega) = [F q_n(x)](\omega) \cdot [F f(x)](\omega) = \frac{[F f(x)](\omega)}{(1+\omega^2)^n}$$

$$\|T_n\| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{(1+\omega^2)^{2n}} = 1$$

$$\|T_n\| = \|F\, T_n\|$$

$(\|F g_n\|_2 = \|g_n\|_2$
trasf. di Fourier preserva la norma in $\mathbb{L}^2)$

consideriamo $T_n f$

$$\| F T_n f \|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^{2n}} \underbrace{|[F f(x)](\omega)|^2}_{\in L^1} d\omega \longrightarrow 0$$

per il teorema della convergenza dominata

dunque $\| T_n f \|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

T_n non ha autovalori:

$$T_n f = \lambda f \Rightarrow \frac{1}{(1+\omega^2)^n} \hat{f} = \lambda \hat{f}$$

ma $\lambda \neq \frac{1}{(1+\omega^2)^n}$ (a parte al più un numero finito di punti)

dunque $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$

$= \frac{1}{1+\omega^2} \in L^1$]

)