• Esercizio 29/06/19

In $L^2(-\pi,\pi)$ si consideri l'operatore $(Tf)(x) = f''(x)$ sul dominio

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in \mathcal{C}^2[-\pi,\pi] : f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi) \}$$

i) Si determinino autovalori ed autovettori di T

ii) L'operatore T è limitato sul suo dominio?

iii) Esiste l'op. adj di T?

iv) Per quali valori di z esiste $(z\mathbb{1} - T)^{-1}$?

Notiamo subito che l'op. T non è altro che l'op. hamiltoniano di una particella libera sul cerchio (per via del suo dominio)

Siccome $\mathcal{C}^2[-\pi,\pi]$ è denso in $L^2(-\pi,\pi)$, abbiamo che $L^2(-\pi,\pi)$ è separabile.

$$T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow L^2(-\pi,\pi)$$

i) Spettro di T

Risolviamo il problema agli autovalori: $Tf = \lambda f$ $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{ODE conosciuta}$$

$$\Rightarrow f(x) = A e^{x\sqrt{\lambda}} + B e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

Dalla sol. generale ricaviamo quella particolare dalle condizioni al bordo

• $f(-\pi) = f(\pi) \rightsquigarrow A e^{\pi\sqrt{\lambda}} + B e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = A e^{-\pi\sqrt{\lambda}} + B e^{\pi\sqrt{\lambda}}$

$$\Rightarrow A\left(e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}}\right) - B\left(e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2i(A-B)\sin(i\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

• $f'(-\pi) = f'(\pi) \rightsquigarrow (A+B)2i\sqrt{\lambda}\sin(i\pi\sqrt{\lambda}) = 0$

La prima eq. è risolta per $A = B$. Banalmente la seconda è risolta anche quando $A = B = 0 \rightsquigarrow f(x) = 0$. La soluzione non banale è data per $A \neq B$

$$2i\sqrt{\lambda}\sin(i\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \rightarrow i\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = -n^2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Lo spettro è dunque $\sigma(T) = \{-n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Le autofunzioni (autovettori) saranno

$$f_n^\pm(x) = e^{\pm inx} \qquad \text{per } A=0 \text{ e } B=0 \text{ rispettivamente.}$$

ii) T è limitato?

Risposta veloce: dallo spettro vediamo subito che T non è limitato siccome va come n^2 che nel limite $n\to\infty$ diverge.

Risposta precisa: Le $f_n^\pm(x)$ formano un set ortonormale completo di $L^2(-\pi,\pi)$. Notiamo che

$$\|Tf_n^+\|_{L^2}^2 = \|-n^2 f_n^+\|_{L^2}^2 = (n^2)^2\int_{-\pi}^{\pi}|e^{inx}|^2\,dx = 2\pi n^4$$

$$\|f_n^+\|^2 = 2\pi$$

f è comb. lineare delle $f_n^\pm$

Dunque

$$\|T\|_{sup}^2 = \sup_{f\in L^2(-\pi,\pi)} \frac{\|Tf\|^2_{L^2}}{\|f\|^2_{L^2}} \geq \frac{\|Tf_n^+\|^2}{\|f_n^+\|^2} = n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

come ci aspettiamo. ⇝ T non è limitato.

iii) ∃ l'op adj di T?

Da MQ ci aspettiamo che T, essendo l'eq. dell'energia, sia autoaggiunto. Vediamo se è vero.

$$(f, Tg) = (T^\dagger f, g) \qquad \forall f,g \in D(T)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^*(Tg)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^* g''\,dx = \cancelto{0}{f^* g'\Big|_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi}(f')^* g'\,dx$$

poichè entrambi sono in $D(T)$

$$= \cancelto{0}{-(f')^* g\Big|_{-\pi}^{\pi}} + \int_{-\pi}^{\pi}(f'')^* g = (Tf, g)$$

$\Rightarrow T^\dagger = T$ è autoaggiunto

iv) Per quali z esiste $(z-T)^{-1}$

Consideriamo $f \in \mathcal{D}(T)$, allora

$$(z-T)^{-1} f = \frac{1}{z+n^2} f \qquad \forall f \in \mathcal{D}(T)$$

per cui

$$(z-T)^{-1} = \frac{1}{z+n^2}$$ che esiste fin tanto che $-z \neq n^2$

ovvia quando $-z$ non è un quadrato perfetto.

<u>NOTA:</u> L'insieme risolvente $\rho(A)$ è il set delle $z \in \mathbb{C}$ t.c. $(z-A)$ è invertibile ed $(z-A)^{-1}$ è limitato su $\mathcal{H}$.
Lo spettro dell'op. A è dato da $\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A)$. ~~Noti~~

Notiamo che $\mathbb{C}/\rho(T)$ sono proprio gli $z = -n^2$, come ci aspettiamo.

- <u>Esercizio 19/07/18</u>

Mostrare che, per $\theta \in \mathbb{R}$ $\quad \exp \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Detto R_θ la matrice, in $L^2(\mathbb{R}^2)$ si consideri l'operatore $(U_\theta f)(x) = f(R_\theta^{-1} x)$. Mostrare esplicitamente che U_θ è unitario.
Si dimostri che gli autovalori di U_π sono solo ± 1 e si caratterizzino i rispettivi sottospazi.

i) Notiamo che, per Cayley-Hamilton $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_M(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow M^2 = -\mathbb{1} \rightsquigarrow M^3 = -M, \; M^4 = \mathbb{1}, \dots$$

dunque

$$e^{\theta M} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \theta^k M^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \theta^{2k} M^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} M^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^{2k+1} + M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} (-1)^k$$

$$= \cos\theta \, \mathbb{1} + M \sin\theta = R_\theta$$

Equivalentemente $M = -i\sigma_2$ con $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ sappiamo che $e^{i\theta\sigma_2}$ genera le rotazioni di $SO(2) \Rightarrow R_\theta$.

ii) Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $U_\theta : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) \longmapsto f(R_\theta^{-1} x)$$

vediamo se U_θ è unitario ⇝ calcoliamo U_θ^+

$$(f, U_\theta g) = \int d^2x\, f^*(x) g(R_\theta^{-1} x) \underset{\uparrow}{=} \int d^2y\, f^*(R_\theta y) g(y)$$

$y = R_\theta x$ ⇝ Jacobiano unitario

$$= (U^+ f, g)$$

Per cui $U_\theta^+ f(x) = f(R_\theta x)$. ma notiamo che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

dunque

$$U_\theta^+ U_\theta f(x) = U_\theta^+ f(R_\theta^{-1} x) = U_\theta^+ f(R_{-\theta} x) = f(x)$$

$$U_\theta U_\theta^+ f(x) = \dots .$$

Per cui $U_\theta^+ U_\theta = U_\theta U_\theta^+ = \mathbb{1}$ & $U_\theta^+ = U_{-\theta} = U_\theta^{-1}$.

iii) Spettro di ~~U_θ~~ U_π

Notiamo che $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$, per cui

$$U_\theta f(x) = f(-x)$$

Ma quindi

$$U_\theta^2 f(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad U_\theta^2 = \mathbb{1} \text{ è un proiettore } (U_\pi = U_\pi^+)$$

Dunque avrà autovalori $\lambda = \pm 1$ e le sue autofunzioni saranno

$\lambda = +1$ ⇝ $f_\lambda(x) = f_\lambda(-x)$ funzioni pari

$\lambda = -1$ ⇝ $-f_\lambda(x) = f_\lambda(-x)$ funzioni dispari.