Spazi di Hilbert infinito dimensionali

Lezione 11

Le differenze con il caso finito dimensionale non sono molte.
Una differenza sostanziale sta nella possibilità o meno di definire una base come nel caso finito dimensionale.
Anche se non necessario per l'esistenza di una base, lavoreremo spesso su spazi di Hilbert separabili.

Def: Sia $(X, (,))$ uno spazio con prodotto scalare e $\emptyset \neq N \subset X$

a) N è detto insieme ortogonale se

i) $0 \notin N$

ii) $(x, y) = 0$ (ossia $x \perp y$) se $x, y \in N$ e $x \neq y$

b) N è detto insieme ortonormale se è ortogonale e $(x, x) = 1$ $\forall x \in N$

Se $(\mathcal{H}, (,))$ è di Hilbert, $N \subset \mathcal{H}$ è detto sistema ortonormale completo o base hilbertiana se è un insieme ortonormale e soddisfa $N^{\perp} = \{0\}$.

Def (separabile): Uno spazio di Hilbert si dice separabile se ammette un insieme denso e numerabile

Thm: Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert

a) $\mathcal{H}$ è separabile se e solo se ha dimensione finita oppure ammette una base hilbertiana numerabile

b) Se $\mathcal{H}$ è separabile, tutte le basi hilbertiane sono finite con lo stesso numero di elementi pari alla dimensione dello spazio, oppure sono tutte numerabili

c) (IMPORTANTE) Se $\mathcal{H}$ è separabile è isomorfo a $\mathbb{C}^n$ dotato del prodotto scalare hermitiano standard con n finito pari alla dimensione di $\mathcal{H}$, oppure è isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$.

Def: Lo spazio $\ell^2(\mathbb{C})$ è lo spazio delle successioni complesse $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$$

Thm: $\ell^2(\mathbb{C})$ è di Hilbert (completo) e separabile.

Dunque vediamo che nel caso separabile le cose sono molto simili sia che sia finito o infinito dimensionale dove ora l'usuale thm di isomorfismo non è più su $\mathbb{C}^n$ ma su $\ell^2(\mathbb{N})$

Esercizio 26/09/18

In uno spazio di Hilbert separabile, sia $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormale completo. Si consideri l'op lineare

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n|x)u_{n+1} \qquad x \in \mathcal{H}$$

i) U è limitato?

ii) U è invertibile?

iii) U è isometrico?

iv) U è unitario?

Si costruisca l'op. aggiunto $U^\dagger$.

1) Siccome $\{u_m\}$ ortonormale $\Rightarrow (u_n, u_m) = \delta_{nm}$
e completo: se $(u_n, v) = 0 \Rightarrow v = 0$. $\forall n = 1, \dots, \infty$

Per cominciare, siccome $Ux \in \mathcal{H}$, cerchiamo i suoi coeff di sviluppo sulla base

$$(u_n, Ux) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x)(u_{k+1}, u_n) = \sum_{k'=2}^{\infty} (u_{k'-1}, x)\underbrace{(u_{k'}, u_n)}_{\delta_{k'n}}$$

$$= (u_{n-1}, x) \qquad \forall n \geq 2$$

$$(u_1, Ux) = 0.$$

i) U è limitato ?

← non dipende da x

Per def, U limitato ⇝ $\|Ux\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux)$ ⇝ usiamo un teorema

<u>Thm</u> (Identità di Parseval)

$\mathcal{H}$ sp. di Hilbert separabile, $\{u_n\}_{k=1}^{\infty}$ base ortonormale completa, allora

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, x)\, u_k \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2$$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k)(u_k, x)$$

coeff. di Fourier di espansione sulla base

Dunque

$$(Ux, Ux) = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, Ux)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k-1}, x)|^2$$

$$= \underset{k=1}{0} + \sum_{k=2}^{\infty} |(u_{k-1}, x)|^2 = \sum_{k'=1}^{\infty} |(u_k, x)|^2 = \|x\|^2$$

$k' = k-1$

$\Rightarrow \|Ux\| = \|x\|$ ⇝ U è limitato !

Questo ci dice anche quale sia la norma del sup dell'operatore

$$\|U\|_{sup} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ x \neq 0}} \frac{\|Ux\|}{\|x\|} = 1$$

ii) U è invertibile ? Deve essere iniettivo e suriettivo

a) U iniettivo $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, U = \{0\}$

Per def del Ker, sono quei vettori $x \in \mathcal{H}$ t.c. $Ux = 0$

$(Ux)_1 = (u_1, Ux) = 0 \quad \forall x$

$(Ux)_{k \geq 2} = (u_k | Ux) = (u_{k-1}, x) = 0$ ⇝ $(u_k, x) = 0 \ \forall x, k \geq 1$

Per completezza della base $\Rightarrow x = 0$. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, U = \{0\}$ iniettivo.

b) suriettivo? Se ogni elemento del codom. di U è immagine di almeno un elemento del dominio di U

Considero $y = u_1 \in \text{Codom}(U) \subseteq \mathcal{H}$

$(u_1, y) = 1 \qquad (u_k, y) = 0 \quad \forall k \geq 2$

Ma siccome $(u_1, y) \neq 0$ ma $(u_1, Ux) = 0 \;\; \forall x \Rightarrow y \notin \text{Im}\,U$

e dunque non è suriettivo.

$\Rightarrow$ U non è invertibile.

iii) U è isometrico? Per def, se U isometrico $\Rightarrow$ $\|Ux\| = \|x\|$ che abbiamo già mostrato.

[N.B. se U isometrico $\Rightarrow$ $\|U\|_{sup} = 1$ ma non viceversa]

iv) U è unitario? $UU^+ = U^+U = \mathbb{1}$ ma anche che $U^+ = U^{-1}$ e dunque richiede che sia invertibile, ma non lo è $\Rightarrow$ non è unitario. Attenzione però

① $U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$

$\|Ux\|^2 = \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$

$(Ux, Ux) = (x, U^+Ux) = (x, x) \Rightarrow U^+U = \mathbb{1}$

ma non garantisce che $UU^+ = \mathbb{1}$

v) Troviamo l'adj $\quad (y|Ux) = (U^+y, x)$

$$(y, Ux) = \sum_{k=1}^{\infty} (y, u_k)(u_k, Ux) = \sum_{k=2}^{\infty} (y, u_k)(u_{k-1}, x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (y, u_{k+1})(u_k, x)$$

Valide $\forall x, y \in \mathcal{H}$

$$(U^+y, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (U^+y, u_k)(u_k, x)$$

$$\Rightarrow (y, u_{k+1}) = (U^+y, u_k) \quad \rightsquigarrow \quad U^+y = \sum_{k=1}^{\infty} u_k (u_{k+1}, y)$$

Esercizio 30/01/20

Nello spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{C})$ si consideri l'operatore

$$Q: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4, \dots)$$

che permuta cioè ciclicamente le componenti del vettore a gruppi di 3.
Q è isometrico? È anche unitario?
Si calcoli il risolvente $R_z = (z-Q)^{-1}$. Per quali z esiste?

i) Q è banalmente isometrico

$$\|Qx\| = \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 .$$ Scambio solo l'ordine nella somma.

ii) Q è unitario?
Evidentemente Q è suriettivo. Essendo anche un'isometria ⇒ è unitario

iii) Il risolvente è un operatore che caratterizza lo spettro ed il dominio dell'op. associato. (cfr. Spectral theory and quantum mechanics - Moretti)
Possiamo considerare uno sviluppo ~~in serie di~~ in serie di potenze che, per definizione, dà $(z-Q)^{-1}$

$$R_z = (z-Q)^{-1} = \frac{1}{z-Q} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-Q/z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Q}{z}\right)^k$$

Per quali valori di z questo sviluppo esiste? La serie geometrica ha raggio di convergenza $\rho = 1$

$$\left\|\frac{Q}{z}\right\|_{sup} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z|}\|Q\|_{sup} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > \|Q\|_{sup}$$

ma siccome Q è isometrico $\|Q\|_{sup} = 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > 1$.

Notiamo ora che

$$Q^0 = \mathbb{1}, \quad Q^1 = Q, \quad Q^2 = Q^2, \quad Q^3 = \mathbb{1}, \dots$$

difatti

$$(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow[Q]{} (x_2, x_3, x_1) \xrightarrow[Q]{} (x_3, x_1, x_2) \xrightarrow[Q]{} (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \dots$$

Per cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{Q}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{Q}{z}\right)^{3k} + \left(\frac{Q}{z}\right)^{3k+1} + \left(\frac{Q}{z}\right)^{3k+2} \right]$$

$$Q^{3k} = \mathbb{1} \qquad Q^{3k+1} = Q \qquad Q^{3k+2} = Q^2$$

ma $Q^2 = Q^\dagger = Q^{-1}$ (come si può vedere dalla seq. precedente)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z^{3n}} \mathbb{1} + \frac{1}{z^{3n+1}} Q + \frac{1}{z^{3n+2}} Q^\dagger \right]$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{1 - 1/z^3} + \frac{1}{z} \frac{Q}{1 - 1/z^3} + \frac{1}{z^2} \frac{Q^\dagger}{1 - 1/z^3}$$

$$= \frac{1}{z^3 - 1} \left(\mathbb{1} z^3 + Qz + Q^\dagger \right)$$

Dunque

$$R_z = \frac{\mathbb{1} z^2 + Qz + Q^\dagger}{z^2 - 1}$$

- Esercizio 10/09/2019

Nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ si consideri la famiglia di operatori $\{T_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ definiti da $(T_a f)(x) = f(x)$ per $x > a$ e $(T_a f)(x) = -f(x)$ per $x < a$.

i) Si dimostri che i T_a sono autoaggiunti ed unitari

ii) Si determini ~~~~ autovalori ed autovettori

iii) Esiste per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ il $\lim_{a \to +\infty} T_a f$? Nel caso quanto vale ?

Esiste anche in norma $\lim_{a \to +\infty} T_a$?

iv) Si calcoli $[T_a, T_b]$, discutere la rilevanza del risultato dal punto di vista dell'esistenza di una base ortonormale di autovettori comuni di T_a e T_b.

Lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ è così definito

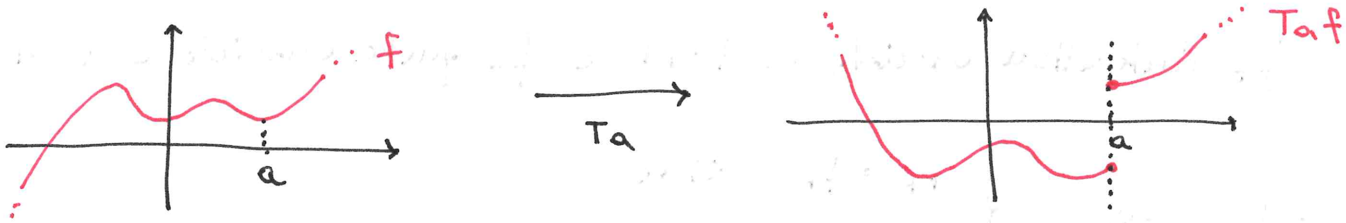
$$L^2(\mathbb{R}) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^2} < \infty \} \quad \text{dove} \quad \|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dx$$

è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale con prodotto scalare canonico

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f} g \, dx$$

$L^2(\mathbb{R})$ è l'unico spazio di Hilbert nella famiglia di spazi $L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p \leq \infty$. In generale gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono di Banach.

L'azione di T_a può essere visualizzata come segue



i) T_a autoaggiunto $\iff$ $T_a^\dagger = T_a$ (più precisamente $(T_a^\dagger f)(x) = (T_a f)(x)$ $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$)

T_a unitario $\iff$ $T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = \mathbb{1}$

se i T_a sono autoaggiunti ed unitari vediamo che

$T_a^\dagger T_a = T_a^2 = \mathbb{1}$ sono idempotenti (sono proiettori in questo caso)

~~unitari~~ autoadj: $(f, T_a g) = (T_a f, g)$

$$(f, T_a g) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f} \, T_a g = \int_{-\infty}^{a} \bar{f}(-g) \, dx + \int_{a}^{\infty} \bar{f} g \, dx$$

$$(T_a f, g) = \int_{\mathbb{R}} (\overline{T_a f}) g = \int_{-\infty}^{a} (-\bar{f}) g \, dx + \int_{a}^{\infty} \bar{f} g \, dx$$

Sono uguali $\Rightarrow$ $T_a^\dagger = T_a$

unitario: mostriamo che $T_a^2 = \mathbb{1}$ siccome T_a è autoaggiunto

$$T_a^2 f = T_a \begin{cases} -f & x < a \\ f & x > a \end{cases} = \begin{cases} f & x < a \\ f & x > a \end{cases} = f(x) \checkmark$$

ii) Per trovare lo spettro di T_a notiamo che

T_a autoaggiunto $\Rightarrow$ autovalori reali

$T_a^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda = \pm 1$

difatti sia f autovettore di T_a con autovalore λ

$$T_a f = \lambda f \Rightarrow T_a (T_a f) = \lambda T_a f$$

$$\Rightarrow f = \lambda T_a f = \lambda^2 f$$

ma se $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \rightsquigarrow \lambda = \pm 1$.

Poniamo f_+ l'autovettore associato a $\lambda = +1$ e f_- quello associato a $\lambda = -1$ allora

$$T_a f_+ = f_+ \rightsquigarrow \begin{cases} f_+ = f_+ & x > a \\ -f_+ = f_+ & x < a \end{cases} \Rightarrow f_+(x<a) = 0$$

Per f_- vale un argomento simile per cui i due autospazi sono generati da

$$L^2(\mathbb{R}) \supset V_+ := \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ per } x < a \}$$

$$L^2(\mathbb{R}) \supset V_- := \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ per } x > a \}$$

~~Il dominio di Ta è dato da~~

Per il thm spettrale i due sottospazi sono in somma diretta ed abbiamo una famiglia spettrale di misure di proiezione $\{ d\mu_{T_a}(\lambda) \}$ dove ora

$$L^2(\mathbb{R}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{2} L^2(\mathbb{R}, d\mu_{T_a}(\lambda_i))$$

$$\mathcal{D}(T_a) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\sigma(T_a)} \lambda^2 \, d(\mu_{T_a}(\lambda) f, f) < \infty \right\}$$

Nel nostro caso

$$d\mu_{T_a}(+1) = \chi_{[a,\infty)}(x)\, dx$$

$$d\mu_{T_a}(-1) = \chi_{(-\infty,a]}(x)\, dx$$

iii) Il limite può essere preso in diversi modi e secondo dello spazio in cui lo studio

① Puntuale N.B: non è nella traccia

$$\lim_{a\to\infty} T_a f(x) \rightarrow x \text{ è fissato per cui } \{T_a f(x)\} \text{ è una successione in } \mathbb{C}$$

Il limite è in $\mathbb{C}$. (f ed x sono fissati)

② Fisso solo f e cerco il limite $\forall x$ (traccia problema)

$\lim_{a\to\infty} T_a f$ è un limite in $L^2(\mathbb{R})$ (f fissato, $\forall x$)

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists M>0 \text{ t.c. se } a>M \Rightarrow \| T_a f - T_\infty f\|_{L^2} < \varepsilon$$

③ Operatoriale

$\lim_{a\to\infty} T_a = T_\infty$ questo è un limite su $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ op. continui lineari su $L^2(\mathbb{R})$

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists M>0 \text{ t.c. se } a>M \Rightarrow \| T_a - T_\infty\|_{sup} < \varepsilon$$

Questo deve essere valido $\forall f, \forall x$.

① $$\lim_{a\to\infty} T_a f(x) = \lim_{a\to\infty} \begin{cases} f(x) & x>a \\ -f(x) & x<a \end{cases} = -f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R} \text{ fissato}$$

② Dal limite precedente ci aspettiamo che un buon candidato sia

$T_\infty f = -f$; vediamo

$$\| T_a f - (-f)\|_{L^2} = \left\| \begin{cases} f & x>a \\ -f & x<a \end{cases} + f \right\|^2_{L^2} = \left\| \begin{cases} 2f & x>a \\ 0 & x<a \end{cases} \right\|^2_{L^2}$$

$$= \int_a^\infty 4|f|^2 dx \xrightarrow[a\to\infty]{} 0 \quad \text{dunque il limite è } -f.$$

$\lim_{a\to\infty} T_a f = -f$

thm convergenza dominata

③ $\|T_a - T_b\|^2_{sup}$ considero $a<b$ (serie di Cauchy)

sicuramente $\exists f_*$ t.c. $\sup_{\|f\|=1} \|\hat{O} f\| \geq \|O f_*\|$

~~Per~~ Senza perdita di generalità scegliamo $\|f\|=1$

$$\|(T_a - T_b) f\|^2_{L^2} = \left\| \begin{cases} 2f(x) & a<x<b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \right\|_{L^2}$$

$$= \int_a^b 4|f|^2 dx \xrightarrow[a,b\to\infty]{} 4\|f\|^2_{L^2} = 4$$

~~Sommiamo~~ Questo vale $\forall f$, $\forall x$ però consideriamo ora f^*_* di norma 1

$$\|(T_a - T_b) f\| \geq \|(T_a - T_b) f_*\| \geq 2$$

non-nullo solo su $[a,b]$ e di norma 1

$$f_*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b-a}} & x\in(a,b] \\ 0 \end{cases} \in L^2(\mathbb{R})$$

Dunque

$\|T_a - T_b\|_{sup} \geq 2$ per cui per completezza di Cauchy $\{T_a\}_{a\to\infty}$ non ha limite.

iv) $[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$. Se $a>b \Rightarrow [T_a, T_b] = -[T_b, T_a]$

$$[T_a, T_b] f = T_a T_b f - T_b T_a f = \begin{cases} x>b & (\mathbb{1} - \mathbb{1}) f = 0 \\ a<x<b & (\mathbb{1}(-\mathbb{1}) - (-\mathbb{1})\mathbb{1}) f = 0 \\ x<a & ((-\mathbb{1})(-\mathbb{1}) - (-\mathbb{1})(-\mathbb{1})) f = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow [T_a, T_b] = 0 \rightsquigarrow \exists$ una base di autovettori comuni

L'espressione è valida anche per $a<b$.

La base è data dai vettori

- $\lambda_a = 1 \quad \lambda_b = 1 \Rightarrow f(x)$ t.c. $\begin{cases} f(x)=0 & x<a \\ f(x)=0 & x<b \end{cases} \rightarrow f(x)=0 \quad x<b$ (per $a<b$)

etc...