Spazi di Hilbert finito dim II

- Esercizio 4/07/18

i) Trovare gli elementi mancanti nella matrice di rotazione sapendo che quelli nella prima colonna sono ≥ 0

$$R = \begin{pmatrix} a & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & a \end{pmatrix}$$

ii) Indicare l'asse di rotazione e il significato del parametro a

iii) Determinare completamente la matrice R^5.

Consideriamo la forma generica

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & 1 & d \\ f & g & a \end{pmatrix} \in SO(3) = \{ R \in GL(3,\mathbb{R}) : R^T R = R R^T = \mathbb{1} \}$$

Per ipotesi $a \geq 0$, $e \geq 0$ & $f \geq 0$.

Chiamiamo i vettori riga di R $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ ed i vettori colonna $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$

Questi formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. (In generale su $SO(n)$ righe / colonne formano base ortonormale di $\mathbb{R}^n$).

$$\Rightarrow \begin{cases} r_i \cdot r_j = \delta_{ij} \\ c_i \cdot c_j = \delta_{ij} \end{cases} \qquad \text{Considero } \|\bar{c}_2\|^2 = 1 \ \& \ \|\bar{r}_2\|^2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)} \ \|\bar{r}_2\|^2 = e^2 + d^2 + 1 = 1 \\ &\text{II)} \ \|\bar{c}_2\|^2 = b^2 + g^2 + 1 = 1 \end{aligned}\right\} \ e, d, b, g = 0.$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & a \end{pmatrix}$$

Dalla condizione di ortogonalità $\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 = ae + af = 0$

$\Rightarrow e + f = 0 \rightsquigarrow e = -f$ oppure $a = 0$

Inoltre $\|\bar{e}_1\|^2 = a^2 + e^2 = 1$

I) Caso $f = -c$

$a^2 + c^2 = 1$

II) Caso $a = 0$

$c^2 = f^2 = 1$

$\Rightarrow f = 1 \ , \ c = -1$

consideriamo i due casi separatamente

I) $R = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$

II) $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Questo è un banale cambio di base dove permutiamo gli elementi di $\mathbb{R}^3$. (È parte del Weyl di $SO(3)$)

Il primo caso è più interessante: abbiamo una parametrizzazione ad un parametro della matrice $\rightsquigarrow$ $a^2 + e^2 = 1 \Rightarrow a = \cos\theta, \ e = \sin\theta$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ii) L'asse di rotazione può essere visto direttamente dalla forma di R. L'unico vettore che rimane invariato sotto l'azione di R è $(0,1,0)$ ossia l'asse y. Possiamo vederlo esplicitamente. Prendiamo $\vec{v}$ generico

$R\vec{v} = \vec{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta + z\sin\theta = x \\ y = y \\ -x\sin\theta + z\cos\theta = z \end{cases} \rightsquigarrow z = \frac{x(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \leftarrow \theta \neq 0, \pi$$

Sostituendo nella terza

$$-x\sin\theta + \frac{x(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\theta = \frac{x(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

Se $x \neq 0$ allora

$$-\sin^2\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta = 1-\cos\theta$$

$$\underbrace{-\sin^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta}_{-1+\cos\theta} = 1-\cos\theta$$

$$-1+\cos\theta = 1-\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = 0$$

In questo caso non possiamo prendere la sol. siccome la cond. di esistenza era $\theta \neq 0, \pi$.

Se $x = 0 \Rightarrow z = 0 \rightsquigarrow \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o in generale $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nel caso in cui $\theta = 0, \pi$ la rotazione è di due forme

$$\theta = 0 \Rightarrow R = \mathbb{1}$$

$$\theta = \pi \Rightarrow R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Rotazione non banale.

A questo punto è evidente che $a = \cos\theta$ può essere interpretato come l'angolo di rotazione intorno a $\hat{y}$.

iii) Per questa domanda sfruttiamo il fatto che $SO(3)$ è un gruppo additivo. Di fatto l'op. di prodotto tra matrici si comporta nel seguente modo

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

Per cui $R^5(\theta) = R(5\theta) = \begin{pmatrix} \cos 5\theta & 0 & \sin 5\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 5\theta & 0 & \cos 5\theta \end{pmatrix}$

• Esercizio 26/09/17

Sia $A = -A^T$ una matrice reale antisimmetrica 3×3 non nulla.

i) Mostrare che A ha un autovalore nullo, due immaginari e che gli autovettori sono ortogonali in $\mathbb{C}^3$

ii) Calcolare e^A con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

i) Per studiare la struttura degli autovalori abbiamo una sola certezza $\rightsquigarrow$ il thm spettrale che si applica su matrici hermitiane e ci assicura che tutti gli autovalori di queste siano reali. Costruiamo una matrice hermitiana a partire da A

$$B = iA \rightsquigarrow B^\dagger = (B^T)^* = (iA^T)^* = (-iA)^* = iA = B$$

$$\Rightarrow B \text{ hermitiana e } \{\lambda_i\}_{i=1}^{3}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo una base ORTOGONALE (thm spettrale) di ~~autovalori~~ autovettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ associati a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Notiamo che se $\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow Bu_1 = \lambda_1 u_1 \rightsquigarrow (Bu_1)^* = B^* u_1^* = -Bu_1^* = +\lambda_1 u_1^*$$

$$\Rightarrow Bu_1^* = -\lambda_1 u_1^*$$

Per cui, abbiamo un nuovo autovalore che mi impone $u_2 = u_1^*$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1.$$

Siccome per una matrice antisimmetrica (anche hermitiana) $\mathrm{Tr}\, A = 0$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = 0 \ !$$

Dunque gli autovalori di A sono $0, i\lambda$ e $-i\lambda$.

Gli autovettori sono automaticamente ortogonali.

ii) Da fare a casa! Vi do solo uno sketch della soluzione

A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ $A = U^\dagger D U$ con $D = \mathrm{diag}(0, i\lambda, -i\lambda)$ mentre U è la matrice degli autovettori di A.

A questo punto

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U^\dagger D U)^k}{k!}$$

Ma chiaramente

$$U^+U = \mathbb{1}$$

$$(U^+DU)^k = \underbrace{(U^+DU\cancel{)(U^+}DU)\cdots\cancel{(U^+}DU)}_{k\text{-volte}}$$

$$= U^+D^kU$$

Per cui

$$e^A \sim \mathbb{1} + A + A^2 + \cdots = \mathbb{1} + U^+DU + U^+D^2U + \cdots$$

$$= U^+(\mathbb{1} + D + D^2 + \cdots)U$$

$$= U^+e^DU.$$

Ma calcolare e^D è banale siccome $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & i\lambda & \\ & & -i\lambda \end{pmatrix}$ e

$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & (i\lambda)^2 & \\ & & (-i\lambda)^2 \end{pmatrix}$ e così via per tutte le potenze

$$\Rightarrow e^A = U^+ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\lambda} & \\ & & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} U.$$

• Esercizio 27/06/2017

Si considerino le matrici 2x2, $x \in \mathbb{R}$

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

Mostrare che formano un gruppo, non unitario, di trasformazioni sui vettori di $\mathbb{C}^2$. Mostrare che è fortemente continuo in $x=0$ i.e. $\lim_{x\to 0} \| M(x)u - u \| = 0$. Determinare T affinché $M(x) = e^{xT}$.

Prima di cominciare vediamo due definizioni

Def (Gruppo): Un gruppo $(G, *)$ è un insieme con un op. binario

$$*: G \times G \longrightarrow G$$

con le seguenti proprietà

i) $\forall f, g \in G \Rightarrow f * g \in G$

ii) $\forall f, g, h \in G \Rightarrow f*(g*h) = (f*g)*h$

iii) $\exists e \in G : \quad e*f = f*e = f \quad \forall f \in G$

iv) $\forall f \in G \quad \exists f^{-1} \in G : \quad f*f^{-1} = f^{-1}*f = e$

Se $*$ è commutativo, allora G è detto abeliano. I gruppi possono essere discreti o continui.

Def (Rappresentazione): Una rappresentazione di un gruppo G è una mappa D degli elementi di G in un set di operatori lineari

$$D: \; G \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(V) \qquad \text{(isomorfismo)}$$

dove V è un qualche spazio vettoriale finito dimensionale con le seguenti proprietà

i) $D(e) = \mathbb{1}$ identità su V

ii) $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 * g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$ ossia la moltiplicazione di gruppo in G è mappata nella moltiplicazione naturale in V. Questo deve essere vero siccome D è un isomorfismo.

Per mostrare che queste matrici formano una rep. di un gruppo vediamo se soddisfa le varie proprietà

1) $M(x)M(y) = M(x+y)$

Ricordiamo che

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

con questi è facile mostrare che (1) è vera.

2) chiaramente siccome l'operazione naturale su $\mathbb{C}^2$ è la somma tra vettori, l'elemento neutro è lo zero

$M(0) = \mathbb{1}$ come si può facilmente vedere.

3) L'inverso di $M(x)$ è chiaramente $M(-x) = M^{-1}(x)$ proprio come nelle rotazioni! Esiste poiché $\det M = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Il gruppo non è unitario, difatti $M^{\dagger}(x) = M(x) \Rightarrow M^{\dagger}(x) M(x) \neq \mathbb{1}$

Questo gruppo è un gruppo continuo poichè dipende da un parametro continuo. Non solo questo, ma è anche differenziabile (vedi elementi di $M(x)$) $\Rightarrow$ è un gruppo di Lie.

Nello specifico le $M(x)$ forniscono una rep. del gruppo $SO(1,1)$ che è il gruppo delle isometrie dello spaziotempo 1+1d.
(Per questo ragione è molto simile alle rotazioni in $\mathbb{R}^2$, $SO(2)$, dove la differenza è nella struttura metrica degli spazi vettoriali su cui agiscono, i.e. $\mathbb{R}^2 \rightarrow (+,+)$ mentre $\mathbb{M}^2 \rightarrow (-,+)$).
minkowski 1+1 d

È fortemente continuo $\lim_{x \to 0} \| M(x) u - u \| = \lim_{x \to 0} \left(u^{\dagger} (M(x) - \mathbb{1})^2 u \right) = 0$
poichè gli elementi di $M(x)$ sono continui in x.

Per rispondere all'ultima domanda, notiamo che essendo il gruppo fortemente continuo, possiamo metterci intorno all'identità (lo 0) ed espandere

$M(\delta x) \simeq \mathbb{1} + \delta x \cdot T + o(\delta x^2)$ dove T è una generica matrice

data da $T = \frac{d}{dx} M(x) \Big|_{x=0}$. Questa matrice è detta <u>GENERATORE</u> del gruppo.

È evidente che dalle proprietà di gruppo, se voglio spostarmi di una quantità finita dall'identità, posso applicare molte volte uno spostamento infinitesimo $\delta x = \frac{x}{n}$

$$M(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{xT}{n} \right)^n = e^{xT} .$$

Dunque

$$T = \frac{d}{dx} M(x) \Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ [N.B. $T^2 = \mathbb{1}$]

Vediamo che funziona

$$e^{xT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n T^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} T^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} T^{2m+1}$$

$$= \mathbb{1}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \mathbb{1}\cosh x + T\sinh x$$

$$= M(x) \quad !$$