I) Eq. di Cauchy - Riemann

$f: G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ aperto. Pongo $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ con $z = x+iy$, $u,v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se f derivabile in $z_0 \in G \Rightarrow u,v$ ammettono derivate parziali in (x_0,y_0) e soddisfano

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} = \partial_y v(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} \\ \partial_y u(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} = -\partial_x v(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} \end{cases}$$

ed $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$. Il teorema vale anche al contrario

II) Se $f: G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$, è differenziabile in tutto G si dice OLOMORFA in G (o ANALITICA)

III) Se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ si dice intera.

Esercizio 5.2.10 (Dispense)

Se f è olomorfa in G $(f: G \to \mathbb{C})$ e $f'(z) = 0$ $\forall z \in G \Rightarrow f$ è costante su G.
G aperto & connesso.

N.B. Per CR $\to$ $\operatorname{Re} f'(z) = u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$

$\operatorname{Im} f'(z) = -u_y(x_0,y_0) = v_x(x_0,y_0)$

$\Rightarrow f'(z) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) + i v_y(x_0,y_0)$.

Ma se $f'(z) = 0$ $\forall z \in G \Rightarrow u_x = u_y = v_x = v_y \big|_{(x_0,y_0)} = 0$ in tutto G.

Dunque si prendano due punti $z, w \in G$. Siccome G è connesso (per archi ad esempio) $\Rightarrow \exists$ poligonale che connette z e w con vertici $z_1, z_2, \dots, z_n$: $z_1 = z$, $z_n = w$. Consideriamo $[z_1, z_2]$ segmento che può essere parametrizzato da

$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ — parte Re

$y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1)$ — parte Im

La derivata tot. rispetto al parametro di $u(x(t), y(t))$ sarà

$$\frac{du}{dt} = u_x(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + u_y(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} = \nabla u \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

pertanto

$$u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1) = \int_0^1 \frac{du}{dt}\,dt = 0$$

$\Rightarrow u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$. Lo stesso vale per i punti successivi.

$u(x_k, y_k) = u(x_{k+1}, y_{k+1}) \longrightarrow u(x_1, y_1) = u(x_n, y_n)$. Analogamente

$v(x_1, y_1) = v(x_n, y_n) \Longrightarrow f(z) = f(w)$.

IV) Mappe conforme & funzioni differenziabili (MAYBE)

CR si può scrivere come $f : G \to \mathbb{C}$

$$i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Se consideriamo la matrice Jacobiana di $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$$J(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Geometricamente questo è una matrice di rotazione + scaling (omotetia)

ROT: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ OMOT: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Ricordo

$J(f)(x_0, y_0)$ è la matrice che approssima linearmente $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ in (x_0, y_0)

Data la forma di $J(f)(x,y)$, se $f'(z) \neq 0$, ci dà una mappa conforme da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

V) Funzione olomorfa $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

VI) Se $f : G \to \mathbb{C}$ è olomorfa $\Rightarrow f = u + iv$ con u, v funzioni in $\mathbb{R}^2$, sono ARMONICHE ossia

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \quad \text{con} \quad \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 .$$

Testi:

- Mathematics of classical & quantum physics - Byron, Fuller
- Function theory of one complex variable - Greene, Krantz
- Elementi di analisi complessa - Presilla
- Appunti di Metodi matematici della fisica (Dispense) - Zaghi
- Rudimenti di analisi infinito-dimensionale (Dispense) - Cesi

} Tanti esercizi

- Data la funzione

$$u(r,\theta) = r\cos\theta$$

dimostrare che tale funzione è la parte reale di una funzione analitica e trovare la sua parte immaginaria tale che $v(r,0)=0$.

1) Parte reale di funzione analitica $\rightarrow$ deve essere armonica

- $u(r,\theta) \rightarrow u(x,y) = x \rightsquigarrow \nabla^2 u(x,y) = 0$ ✓

- $u(r,\theta) \rightarrow \nabla^2_{pol} u(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) + \frac{1}{r^2} r\cos\theta$$

$$= \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{1}{r}\cos\theta = 0$$ ✓

2) Trova parte immaginaria $\longrightarrow$ CR

- In coord cartesiane

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}\begin{cases} v_y = 1 \\ v_x = 0 \end{cases}$$

Importante!

(I) $v(x,y) = \int dy\, 1 = y + A(x)$ $\Rightarrow y + A(x) = B(y)$

(II) $v(x,y) = B(y)$

Siccome $B(y)$ dipende solo da $y \Rightarrow A(x) = 0$

$v(x,y) = y \rightarrow f(x,y) = x + iy$

$f(r,\theta) = r\cos\theta + i r\sin\theta = re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = z}$$

- In coordinate polari

REMINDER : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{\partial f(x(r,\theta), y(r,\theta))}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \to J^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T$$

$$J^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ u_y = \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Per CR

$$\begin{cases} \cos\theta\, v_r + \dfrac{1}{r}\sin\theta\, v_\theta = 0 \rightsquigarrow v_r = \dfrac{1}{r}\operatorname{tg}\theta\, v_\theta \\ \sin\theta\, v_r + \dfrac{1}{r}\cos\theta\, v_\theta = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}v_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\, v_\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta\, v_\theta + \cos^2\theta\, v_\theta = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow v_\theta = r\cos\theta \rightsquigarrow v(r,\theta) = r\sin\theta + A(r)$$

Dalla condizione al bordo $v(r,0) = A(r) = 0 \to v(r,\theta) = r\sin\theta$ ✓

- Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione
  $$u(x,y) = \cos x\,(e^{ay} + e^{-y})$$
  è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$ su tutto $\mathbb{C}$.
  Trovare le $f(z)$.

1) Armonica
$$\nabla^2 u(x,y) = -\cos x\,(e^{ay} + e^{-y}) + \cos x\,(a^2 e^{y} + e^{-y})$$
$$= -\cos x\left((1-a^2)\,e^{ay}\right) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Two runs

- $B_c - B$
- ~~+ Dark metrics metod for $B_c - B$ exclusive~~

~~Meeting $\to$ converge: if we have the numbers~~

~~+ D-$\bar{D}$ mixing + new physics afterwards~~

Era anche evidente

$\boxed{a=1}$ $\quad u(x,y) = \cos x\,(e^y + e^{-y}) = 2\cos x \cosh y$

$\boxed{a=-1}$ $\quad u(x,y) = 2e^{-y}\cos x$

2) Trovare $f(z) \Rightarrow$ CR eqns

- $a=1$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \to \begin{cases} -2\sin x \cosh y = v_y \\ 2\cos x \sinh y = -v_x \end{cases}$$

Integrando $\qquad \int dy \quad \int dx$

$v(x,y) = \cancel{-2\sin x \cosh} \; -2\sin x \sinh y + A(x)$

$v(x,y) = -2\sin x \sinh y + B(y)$

$\rightsquigarrow A(x) = B(y) = 0$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\cos x \cosh y - 2i\sin x \sinh y \\ &= \cos x\,(e^y + e^{-y}) - i\sin x\,(e^y - e^{-y}) \\ &= e^y(\cos x - i\sin x) + e^{-y}(\cos x + i\sin x) \\ &= e^y e^{-ix} + e^{-y}e^{ix} = e^{y-ix} + e^{-y+ix} \\ &= \boxed{e^{-iz} + e^{iz} = f(z)} \end{aligned}$$

- $\boxed{a=-1}$

$$\begin{cases} -2e^{-y}\sin x = v_y(x,y) \\ -2e^{-y}\cos x = -v_x(x,y) \end{cases} \to \begin{array}{l} 2e^{-y}\sin x + A(x) = v \\ 2e^{-y}\sin x + B(y) = v \end{array} \Rightarrow A = B = 0$$

$f(x,y) = 2e^{-y}\cos x + 2i\,e^{-y}\sin x = 2e^{-y}e^{ix} = \boxed{2e^{iz} = f(z)}$

• Si consideri la funzione $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$. Sulla retta reale $y=0$, si ha

$$u(x,0) = \sin^2 x \qquad v(x,0) = 0$$

Calcolare $f(z)$ nel punto $z = 5 + i8$

1) By inspection

$$f(z) = \sin^2 z$$ che è analitica (olomorfa)

Di fatti

$$f(x,y) = \sin^2(x+iy) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x + 2iy)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos(2x)\cos(2iy) - \sin(2x)\sin(2iy)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\cosh(2y)\right] - \frac{1}{2} i \sin(2x)\sinh(2y)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\cosh(2y)$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{2}\sin(2x)\sinh(2y)$$

che sono soluzioni delle boundary condition.

Proof of (V).

Si costruiscano gli op. differenziali $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ e $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Per cui se $f(z)$ è olomorfa (aka Ref e Imf soddisfano CR)

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u(x,y) + iv(x,y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x)$$

$$= 0 \; !$$

Esercizio Zaccone

3) Trovare la trasformata di Möbius $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$

che porta

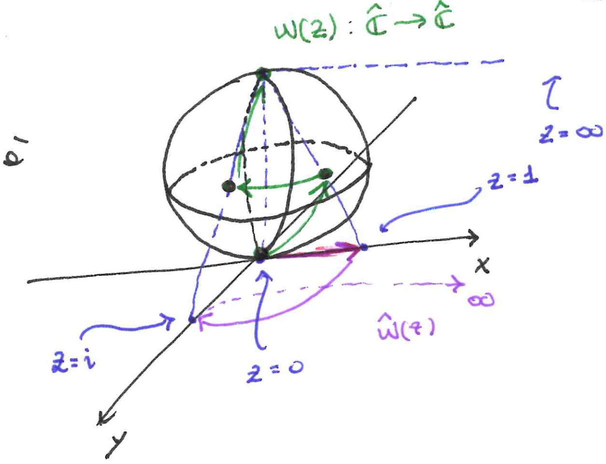
$z=1 \longmapsto w=i$; $z=0 \longmapsto w=1$; $z=i \longmapsto w=\infty$

Teoria: Trasf. di Möbius è una mappa conforme sulla sfera di Riemann $w : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Nella sua rep matriciale

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha che $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc \neq 0$. Per cui w possiede un'inversa $\Rightarrow$ w è un automorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$. Le trasf. di Möbius formano un gruppo $Aut(\hat{\mathbb{C}})$. La rep matriciale fornisce un omeomorfismo di gruppi $\phi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(\hat{\mathbb{C}})$. Il nucleo $Ker\,\phi = \{I, -I\}$ per cui dal primo teorema di isomorfismo si ha che $Aut(\hat{\mathbb{C}}) \cong GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

Difatti $w : \mathbb{P}\mathbb{C}_1 \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}_1$, in coordinate omogenee $z = \dfrac{x}{y}$

$w(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. ← questo riprende la struttura dell'azione $\mathbb{Z}_2$.



Esercizio:

chiaramente se $w(i) \to \infty$, il denominatore sarà

1) $z-i \Rightarrow c=1,\ d=-i$

$$w(z) = \frac{az+b}{z-i}$$

2) Per $w(0)=1 \Rightarrow -\dfrac{b}{i} = 1 \Rightarrow b=-i$

$$w(z) = \frac{az-i}{z-i}$$

3) Per $w(1)=i \Rightarrow \dfrac{a-i}{1-i} = i \Rightarrow a = i-1+i \Rightarrow a = 2i-1$

Per cui

$$w(z) = \frac{(2i-1)z-i}{z-i} .$$