Integrali nel piano complesso

- Gli integrali nel piano complesso di una funzione $f(z): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si comportano in maniera analoga a quelli delle funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con alcune accortezze.

Chiaramente questi integrali saranno integrali di linea.

Def: Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino regolare a tratti e $f: D \to \mathbb{C}$ una funzione continua con $D \supset \{\gamma\}$. Allora l'integrale di f lungo ~~esso~~ γ è un numero complesso

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

(Questo vale anche per tutte le curve omotope a γ con estremi coincidenti)

f può essere definita su $\{\gamma\}$ a meno di un numero finito di punti

Proprietà varie: $w \in \mathbb{C}$

- $\displaystyle\int_\gamma w f(z)\,dz = w \int_\gamma f(z)\,dz$
- $\displaystyle\int_\gamma (f(z)+g(z))\,dz = \int dz\, f(z) + \int dz\, g(z)$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$
- $\displaystyle\int_{\gamma+w} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z+w)\,dz$

Thm: (Cauchy - Goursat): Sia f analitica su e all'interno di γ curva CHIUSA regolare a tratti e semplice. Allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Questo vale per qualsiasi curva γ omotopa a zero.

• Thm (Cauchy integral formula)

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}$ aperto, olomorfa su U. Sia $z_0 \in U$ e $r > 0$ tale che $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$. Si consideri $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva C^1 della forma $\gamma(t) = z_0 + r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)$. Allora $\forall z \in D(z_0, r)$ si ha che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\, dw$$

N.B. Allora $f(z)$ è determinata solamente dai suoi valori sulla curva γ, molto diverso rispetto alle funzioni reali.

Corollario: Il thm di Cauchy ci permette di sapere che, a priori, per ogni funzione olomorfa f, tutte le sue derivate esistono. Difatti sia $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e f olomorfa $\Rightarrow f \in C^\infty(U)$. Inoltre se $\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$ e $z \in D(z_0, r)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^K f(z) = \frac{K!}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_0, |w-z|)} \frac{f(z)}{(w-z)^{K+1}}\, dz .$$

Esercizi:

1) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}}\, dz$ dove γ è il cammino di integrazione percorso in senso antiorario, costituito dalla semicirconferenza $|z| = 2$ con $\operatorname{Im} z > 0$ e dal segmento dell'asse reale compreso tra $z = -2$ e $z = 2$

⇝ Abbiamo $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ con $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ $0 \le t \le \pi$ e $\gamma_2(t) = t$ $-2 \le t \le 2$.

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} (i2e^{it})\, dt = \int_0^\pi 2i\, e^{3it}\, dt = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}} = \int_{-2}^{2} dt = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \int_\gamma \frac{z}{\bar{z}}\, dz = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} .$$

2) Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma z^{-1} \log z \, dz \qquad \text{dove } \gamma(\theta) = e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

scegliendo per il log il ramo $\log z = \log r + i\theta$ dove $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$

e $0 < \theta < 2\pi$

⇝ Notiamo $z^{-1}\log z$ è continuo su $\{\gamma\}$ ad eccezione del punto $z=1$ corrispondente alla linea di diramazione del log.

Allora

$$\int_\gamma z^{-1}\log z = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}(\log 1 + i\theta)e^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i^2 \theta \, d\theta = -2\pi^2$$

Analogamente, notiamo che

$$z^{-1}\log z = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\log^2 z\right) \quad \text{ad eccezione dei punti di diramazione}$$

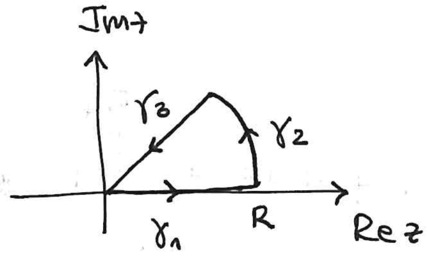
Per cui se considero $\gamma_\varepsilon(\theta) = e^{i\theta}$ $\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon$, allora

$$\int_\gamma z^{-1}\log z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z^{-1}\log z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\log^2 z \Big|_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(i^2(2\pi-\varepsilon)^2 - i^2\varepsilon^2\right) = -2\pi^2.$$

3) Integrali di Fresnel (In fisica spuntano quando si studia la diffrazione nel limite di Fresnel)

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$



Consideriamo $f(z) = e^{iz^2}$ nel cammino

$\gamma_1(t) = t \qquad 0 \le t \le R$

$\gamma_3(t) = t\, e^{i\pi/4} \qquad R \le t \le 0$

$\gamma_2(t) = R\, e^{it} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

Perchè ho scelto $f(z) = e^{iz^2}$? Naturalmente

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma e^{iz^2}\,dz = \int_\gamma \cos(z^2) + i\int_\gamma \sin(z^2)$$

ovvio le continuazioni analitiche a $\mathbb{C}$ delle funzioni originali.
Siccome vogliamo solo $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$, ovvio le due funzioni sull'asse reale $\to \gamma_1(t)$. Dobbiamo sperare che sulle altre due curve gli integrali ci diano il numero giusto.
Notiamo innanzitutto che $f(z)$ è intero su e dentro γ

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z) = 0 \quad !$$

cominciamo a calcolare i vari integrali

$$\gamma_1: \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R dt\, e^{it^2} = \int_0^R \cos(x^2)\,dx + i\int_0^R \sin(x^2)\,dx$$

$$\gamma_3: \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_0^R dt\, e^{i\pi/4} e^{it^2 e^{2i\pi/4}}$$

$$= -e^{i\pi/4}\int_0^R dt\, e^{-t^2}$$

Integrale notevole: gaussiana

$R \to \infty$ fa $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\gamma_2: \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/4} dt\, iRe^{it} e^{iR^2 e^{2it}}$$

Notiamo che

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_2} |f(z)|\,dz = \int_0^{2\pi} dt\, R\left|e^{iR^2(\cos 2t + i\sin 2t)}\right|$$

$$= \int_0^{2\pi/4} dt\, R\, e^{-R^2 \sin(2t)}$$

Continuando con le maggiorazioni, abbiamo che $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ $\quad 0<\theta<\pi/2$

per cui

$$\leq \int_0^{2\pi/4} dt\, R\, e^{-R^2 \frac{4t}{\pi}} = -\frac{\pi}{4R} e^{-\frac{4R^2 t}{\pi}} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

Per $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_1} \to \int_0^\infty \cos x^2 + i\int_0^\infty \sin x^2 \qquad \int_{\gamma_3} \longrightarrow -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$\int_{\gamma_2} \longrightarrow 0$$

Per cui

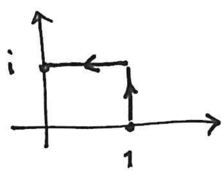
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 = \int_0^\infty \cos x^2 + i\int_0^\infty \sin x^2 - \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos x^2 + i\int_0^\infty \sin x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad \checkmark$$

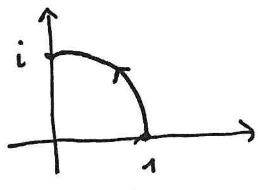
4) Calcolare i seguenti integrali

i) $\int_\gamma \operatorname{Re} z$ $\qquad$ ii) $\int_\gamma z^2 dz$

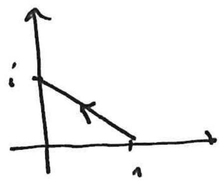
on the following curves



(a)



(b)



(c)

i a) $$\int_\gamma \operatorname{Re} z = \int_0^1 1\cdot i\,dt - \int_0^1 \operatorname{Re}(i+t) = i - \int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{2}+i$$

b) $$= i\int_0^{\pi/2} e^{it}\operatorname{Re}(e^{it})dt = i\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos t\,\sin t\,dt = \frac{i\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

c) $\gamma(t) = (1-t) + it$

$$\int_\gamma \mathrm{Re}\, z = \int_0^1 \mathrm{Re}\left(((1-t)+it)(i-1)\,dt\right.$$

$$= (i-1)\int_0^1 1-t\, dt = \frac{i-1}{2}$$

ii a) $$\int_\gamma z^2 dz = -i\int_0^1 t^2 dt + \int_1^0 t^2 dt = -\frac{1+i}{3}$$

b) $$\int_\gamma z^2 dz = i\int_0^{\pi/2} e^{2it} e^{it} = i\int_0^{\pi/2} e^{3it} dt = -\frac{1}{3}(1+i)$$

c) $$\int_\gamma z^2 dz = \int_\gamma ((1-t)+it)^2 (i-1)$$

$$= (i-1)\left(\int_0^1 dt - 2\int_0^1 t\, dt + 2i\int_0^1 t\, dt - 2i\int_0^1 t^2 dt\right)$$

$$= -\frac{1+i}{3}$$

Perchè nel caso (a) gli integrali sono diversi?