Esercizio Cayley-Hamilton corretto

Ringrazio gli studenti per avermi fatto notare l'errore nell'es. svolto in aula.

Dobbiamo sviluppare in serie di potenze intorno a $z=0$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

Eravamo al punto in cui

$$\begin{pmatrix} c_{k+1} \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

per CH: $p_A(A) = A^2 + A + I = 0 \Rightarrow A^2 = -A - I$

$A^3 = -A^2 - A \rightsquigarrow A^2 = -A^3 - \cancel{A}$ a

$\Rightarrow -A^3 - \cancel{A} = -A - I \rightsquigarrow A^3 = A$ per cui $\boxed{A^{3K} = I}$

Da qui notiamo che

$A^4 = A$; $A^5 = A^2$; etc...

Per cui abbiamo

$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_2 = -c_0 - c_1 = 0$

$A^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{-A-I} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_3 = c_0 = 1$

$A^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_4 = c_1 = -1$

$A^4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_5 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_5 = -c_1 - c_0 = 0$

$A^5 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} c_6 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_6 = c_0 = 1$

Per cui in generale notiamo che

$$c_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -1 & k=1 \\ 1 & k=3n \\ -1 & k=3n+1 \\ 0 & k=3n+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 & k=3n \\ -1 & k=3n+1 \\ 0 & k=3n+2 \end{cases}$$

Per cui lo sviluppo sarà della forma

$$\frac{1}{1+z+z^2} = 1 - z + z^3 - z^4 + z^6 - z^7 + o(z^9)$$

In maniera concisa, ma comunque orribile, potremo scrivere

$$c_k = (-1)^{k \bmod 3} - \left\lfloor \frac{k \bmod 3}{2} \right\rfloor$$

dove la funzione $\lfloor \cdot \rfloor$ è detta funzione floor. ed è definita come

$\lfloor x \rfloor = \max \{ m \in \mathbb{Z} : m \leq x \}$.

Mentre $k \bmod 3$ sono gli elementi di $\mathbb{Z}_3$ presi come i rappresentanti banali delle classi di equivalenza.